

Six Essays on
Stochastic and Deterministic Dynamic Pricing and Advertising
Models

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum politicarum
(Doktor der Wirtschaftswissenschaft)

eingereicht an der

Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Humboldt-Universität zu Berlin

von

Dipl.-Math. Dipl.-Kfm. Rainer Schlosser

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:

Prof. Dr. Jan-Hendrik Olbertz

Dekan der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät:

Prof. Dr. Ulrich Kamecke

Gutachter: 1. Prof. Dr. Kurt Helmes

2. Prof. Michael C. Burda, Ph.D.

Tag des Kolloquiums: 23. Mai 2014

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Stipendiat in der Zeit vom 1. Juli 2011 bis zum 30. September 2013 bzw. danach als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Operations Research der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Humboldt-Universität zu Berlin. Ermöglicht wurde die Arbeit an der Dissertation durch die Förderung des Landes Berlin im Rahmen des Elsa-Neumann-Stipendiums.

Die sechs Kapitel der Arbeit sind als eigenständige Forschungsartikel bzw. Vorveröffentlichungen geschrieben und können unabhängig voneinander gelesen werden. Trotz der gemeinsamen übergreifenden Thematik gibt es nur geringfügige Überlappungen zwischen den Kapiteln; die Notation ist weitestgehend konsistent gewählt. Die ersten drei Kapitel sind bereits veröffentlicht bzw. zur Veröffentlichung eingereicht worden und daher in englischer Sprache verfasst. Die drei letzten Kapitel sind auf Deutsch geschrieben.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt zunächst meinem Doktorvater, Herrn Professor Dr. Kurt Helmes, für seine hervorragende Unterstützung und sein persönliches Engagement bei der Betreuung dieser Arbeit. Durch seine vielfältigen Anregungen und Hinweise sowie nicht zuletzt sein jederzeitiges Interesse hat er entscheidend zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen. Der intensive Austausch von Ideen sowie der eingeräumte Freiraum haben es ermöglicht, dass ich auf eine besondere, produktive Zeit zurückblicken kann.

Ebenfalls herzlich bedanken möchte ich mich bei meinem Coautor Herrn Martin Weber sowie bei Herrn Professor Dr. Andreas Brandt für die zahlreichen Anmerkungen und die konstruktive Kritik. Darüber hinaus möchte ich allen Kollegen am Institut für Operations Research für ihre Unterstützung und ihr Interesse an meiner Arbeit danken. Der größte Dank gilt meiner Familie, vor allen meinen Eltern.

Abschließend möchte ich dem Land Berlin für die finanzielle Unterstützung und Herrn Prof. Burda für die Übernahme des Zweitgutachtens danken.

Kurzzusammenfassung

Die sechs Kapitel der vorliegenden kumulativen Arbeit behandeln stochastische und deterministische Modelle für den Verkauf verderblicher sowie langlebiger Güter. Die dynamischen Modelle sind durch die Möglichkeit der simultanen Variation von Preis und Werbung charakterisiert. Im klassischen Monopolfall werden verschiedene zeitstetige Modellvarianten mit dem Ziel betrachtet, Formeln für die (erwarteten) Gewinne sowie die optimalen Preis-Werbestrategien zu bestimmen und den optimal gesteuerten Verkaufsprozess quantitativ und qualitativ auszuwerten.

Darüber hinaus steht die zusätzliche Berücksichtigung und Analyse von (i) Adoptionseffekten, (ii) der sozialen Effizienz optimaler Politiken, (iii) Oligopolwettbewerb und (iv) der Risikoaversion des Entscheiders im Zentrum der Arbeit. Für die Spezialfälle isoelastischer und exponentieller Nachfrage in Verbindung mit isoelastischer Werbewirkung gelingt es explizite Lösungen herzuleiten, welche zur Beantwortung spezifischer Fragestellungen analysiert werden.

Kapitel 1 behandelt den stochastischen Spezialfall isoelastischer Nachfrage unter Diskontierung. Es werden explizite Lösungsformeln hergeleitet und genutzt, um den erwarteten Verkaufsprozess genauer auszuwerten. Darüber hinaus wird untersucht unter welchen Bedingungen die Preis-Werbestrategien des Monopolisten sozial effizient sind und ob es sich lohnt auf fallende Preisentwicklungen zu spekulieren.

Kapitel 2 untersucht anhand des deterministischen Modells mit isoelastischer Nachfrage den sich überlagernden Einfluss von Zeitinhomogenitäten und verkaufsabhängigen Ansteckungs- bzw. Sättigungseffekten in der Nachfrage. Auf Basis der hergeleiteten partiellen Differentialgleichungslösung kann der optimale Verkaufsprozess über die Zeit exakt beschrieben und ökonomische Einsichten gewonnen werden.

Kapitel 3 analysiert einen dynamischen Oligopolwettbewerb mit unendlichem Zeithorizont, isoelastischer Nachfrage und Adoptionseffekten. Die Lösung des Modells basiert auf einem mehrdimensionalen Nash-Gleichgewicht dessen Existenz und Eindeutigkeit bewiesen wird. Neben der Analyse von Marktmachtfaktoren wird die Evolution der Preise sowie der Marktanteile der einzelnen Wettbewerbsteilnehmer allgemein ausgewertet.

Kapitel 4 untersucht stochastische Mehrproduktprobleme mit produktspezifischen Adoptionseffekten, Lagerkosten und einer übergreifenden Werbekomponente. Im Falle isoelastischer Nachfrage werden monopolistische Verkaufsprobleme mit verderblichen und langlebigen Gütern gelöst. Für den Verkauf langlebiger Güter wird ein rekursives Lösungskonzept vorgestellt, welches allgemein genug ist, um auch auf andere Nachfrageklassen angewandt zu werden.

Kapitel 5 entwickelt die Lösung eines deterministischen Modells mit kontinuierlichem Zustandsraum, zeitabhängigen Stückkosten und exponentieller Nachfrage. Die gefundene explizite Lösung ist zweiteilig und durch Über- bzw. Unterbestände charakterisiert. Wir identifizieren zudem Klassen selbstfinanzierender Regulierungsmechanismen, welche die soziale Effizienz der monopolistischen Strategien implizieren. Es wird außerdem gezeigt wie zusätzliche Lagerkosten internalisiert werden können.

Kapitel 6 untersucht ein stochastisches exponentielles Nachfragemodell unter konstanter absoluter Risikoaversion. Wir leiten eine explizite Lösung des Modells her und werten den Verkaufsprozess umfassend aus. Insbesondere untersuchen wir erwartete Preisentwicklungen und berechnen die Gewinnverteilung für verschiedene Grade von Risikoaversion. Zudem studieren wir in welcher Beziehung die Lösung des risikoaversen, des risikoneutralen und des verwandten deterministischen Modells stehen.

Inhalt

	Einleitung und Zusammenfassung	1
I	Dynamic Advertising and Pricing with Constant Demand Elasticities	10
	1. Introduction	10
	2. Model Formulation	16
	3. An Analytical Solution of the Model	17
	4. Additional Results	24
	5. Waiting and Expected Prices	29
	6. Social Efficiency	32
	7. The Deterministic Model with Continuous State Space	35
	Appendix	38
	References	40
II	Optimal Advertising and Pricing in a Class of General New-Product Adoption Models	44
	1. Introduction	44
	2. Specification of the Model	47
	3. Explicit Solution Expressions	49
	4. The Class of Power Functions $\psi(y) = y^b$	54
	4.1 Power functions combined with a general time factor $\mu(t)$	54
	4.2 Illustration of the case when μ is constant	55
	4.3 Comparative statics	57
	4.4 Illustration of the case when $\mu(t)$ depends on time	59
	5. Controlled Flexible Bass Models	61
	5.1 The system functions $\psi(y) = \sqrt{y}$ and $\psi(y) = y + y(1 - y)$: A comparison	61
	5.2 The controlled Bass model	63
	6. Conclusions	66
	References	67
III	Oligopoly Advertising and Pricing in Isoelastic Adoption Models	71
	1. Introduction	71
	2. The Deterministic Oligopoly Model	74
	2.1 Optimality conditions	76
	2.2 Fundamental results	77
	3. A Special Market Structure General but a General Adoption Function	79
	4. Heterogeneous Unit Costs and Price Elasticities, and a Special Class of Adoption Functions	83
	5. Conclusions	89
	A Collection of Formulas	90
	B Proofs	91
	C Tables	96
	References	97

IV	Stochastische Dynamische Preissetzung im Mehrproduktfall mit Dynamischem Werbeeinfluss	100
	1. Einleitung	100
	2. Modellbeschreibung	102
	3. Lösung für Unendliche Horizonte	104
	3.1 Mehrproduktfall mit langlebigen Gütern	104
	3.2 Auswertung und Simulation	107
	3.3 Der Einproduktfall mit Stück- und Lagerkosten	109
	4. Lösung für Endliche Horizonte	110
	4.1 Mehrproduktfall mit verderblichen Gütern	110
	4.2 Auswertung und Simulation	115
	5. Fazit	118
	Literatur	118
	Anhang	120
V	Eine Deterministische Version des Exponentiellen Preismodells mit Dynamischem Werben und Inhomogener Nachfrage	128
	1. Einleitung	128
	2. Modellbeschreibung und Analytische Lösung	130
	2.1 Modellbeschreibung	130
	2.2 Lösungsansatz	132
	2.3 Analytische Lösung	133
	2.4 Eigenschaften optimaler Politiken	135
	3. Open Loop Lösung	138
	4. Soziale Effizienz	142
	4.1 Effiziente Anpassungen	142
	4.2 Transferkosten und selbstfinanzierende Anpassungen	145
	5. Modellierung von Lagerkosten und Restwerten	148
	6. Fazit	151
	Literatur	151
	Anhang	153
VI	Ein Stochastisches Dynamisches Preis-Werbemodell unter Risikoaversion	158
	1. Einleitung	158
	2. Modellbeschreibung	161
	3. Analytische Lösung	164
	4. Auswertung und weitere Eigenschaften	169
	5. Erwartete Preisentwicklung	172
	6. Konvergenz zum Deterministischen Modell	174
	7. Zusammenfassung	178
	Literatur	179
	Anhang	181
	Vorträge im OR Forschungsseminar und Konferenzteilnahmen	199
	Wissenschaftlicher Werdegang	200
	Selbständigkeitserklärung	201

Einleitung und Zusammenfassung

Die in dieser Arbeit behandelten dynamischen Preis-Werbemodelle sind Teil des Revenue Managements, welches eines der sehr erfolgreichen Anwendungsgebiete des Operations Research repräsentiert. Das Revenue Management bedient vielseitige Anwendungsfelder der betriebswirtschaftlichen Praxis und beinhaltet einen Mix aus Methoden zur Kapazitätssteuerung, Nachfrageprognose und Preisdifferenzierung.

In diesem Kontext gehen die thematisierten Verkaufsprobleme von einer gegebenen Produktmenge bzw. Marktgröße aus, welche innerhalb eines bestimmten Zeitraums verkauft werden soll. Wir nehmen an, dass die Nachfrage einer bekannten Charakteristik folgt und neben dem gesetzten Preis auch durch Werbemaßnahmen beeinflusst werden kann. Weitere zentrale Einflussfaktoren sind Diskontierung, Produktions- und Lagerkosten sowie Zeitinhomogenität und Ansteckungs- bzw. Sättigungseffekte in der Nachfrage. Aufgabe und Ziel ist es, durch dynamische Preisfestsetzung und die simultane Steuerung von Werbemaßnahmen den Verkaufsprozess gewinnoptimal zu steuern. Wir beschränken uns dabei auf Kunden, welche nicht strategisch handeln.

Die thematisierten Verkaufsprobleme stehen somit einerseits mit dem Gebiet der Lagerhaltung und andererseits dem Marketing in Verbindung. Die Literatur zur dynamischen Preissetzung ist zum Beispiel in den Büchern von Talluri, van Ryzin (2004) und Phillips (2005) zusammengefasst; einen guten Überblick liefert auch der deutschsprachige Artikel von Gönsch et al. (2009). Für grundlegende Ergebnisse im Rahmen des dynamischen Werbens sei auf die umfassenden Arbeiten von Sethi, Thompson (2000), Steffenhagen (2006), Bagwell (2007) und den aktuellen Übersichtsartikel von Huang, Leng, Liang (2012) verwiesen.

Beide Forschungszweige haben sich bisher weitgehend unabhängig voneinander entwickelt. Ein Grund dafür mag sein, dass die überwiegende Anzahl von Marketing Modellen ausschließlich die Entscheidungsvariable Werbung, nicht aber den Preis als Steuerung heranziehen. Darüber hinaus werden zumeist Modelle mit deterministischer Nachfrage, Diskontierung und unendlichem Zeithorizont betrachtet. Dagegen wird in der klassischen dynamischen Preissetzung der Verkauf von verderblichen bzw. terminierten Gütern (wie z.B. Konzert- oder Airline Tickets) unter stochastischer Nachfrage und ohne Diskontierung untersucht.

Trotz der unterschiedlichen Tradition beider Gebiete sind die behandelten Problemstellungen grundlegend verwandt und lassen sich unter verallgemeinerten Preis-Werbemodellen erfassen. Jedoch finden sich bisher nur wenige Artikel, etwa Sethi et al. (2008), Krishnamoorthy et al. (2010) und MacDonald, Rasmussen (2009), welche dynamische Preissetzung verbunden mit dynamischem Werben untersuchen.

Die Aktualität der letztgenannten Veröffentlichungen deutet daraufhin, dass sich beide Forschungszweige annähern. Die computergestützten Möglichkeiten und Erfordernisse des elektronischen Handels sowie die wachsende Bedeutung von Kommunikationskanälen macht die Koordination von Preis- und Werbeentscheidungen möglich und nötig. Es ist davon auszugehen, dass mit der angestrebten Steigerung der Realitätsnähe von Verkaufsmodellen sowohl die Komplexität als auch die Interdisziplinarität im modernen Revenue Management zunimmt. Einen Beitrag dazu liefert die vorliegende Promotionsarbeit.

Im Rahmen dieser Arbeit untersuchen wir u.a. die folgenden Fragestellungen:

- Wie sollte der simultane Einsatz von Preis und Werbung erfolgen?
 - Welche Abverkaufszahlen und Gewinne sind unter optimalen Politiken zu erwarten?
 - In welchem Bezug stehen stochastische und deterministische Modelle?
 - Welche Lösungsansätze sind geeignet?
- (i) Auswertung quantitativer und qualitativer Einflüsse
- Wie macht sich zeitinhomogene (z.B. saisonale) Nachfrage bemerkbar?
 - Welchen Einfluss haben Produktions- und Lagerkosten sowie die Diskontrate?
 - Wie wirken sich Adoptionseffekte aus?
 - Können strukturelle Einsichten gewonnen und Handlungsempfehlungen gegeben werden?
 - Lohnt es sich aus Kundensicht auf fallende Preise zu spekulieren/warten?
- (ii) Soziale Effizienz
- Gibt es Fälle in denen ein Monopolist sozial effizient handelt?
 - Welche Eingriffsmöglichkeiten gibt es monopolistische Strategien zu beeinflussen?
 - Können dabei entstehende Transfer- bzw. Subventionskosten vermieden werden?
- (iii) Oligopolwettbewerb
- Wie wirkt sich eine höhere Anzahl an Wettbewerbsteilnehmern aus?
 - Können im asymmetrischen Fall Wettbewerbsvorteile identifiziert und bewertet werden?
- (iv) Risikoaversion
- Wie wirkt sich Risikoaversion auf optimale Preis-Werbepolitiken aus?
 - Wird im Schnitt mehr oder weniger als im risikoneutralen Fall verkauft?
 - Wie hängt die optimale Gewinnverteilung von der Risikoneigung ab?

Die obigen Fragestellungen skizzieren die Ziele der Arbeit und sollen dabei helfen die komplexe Wirkungsweise von dynamischen Preis- und Werbestrategien besser zu verstehen. Bevor wir die erzielten Ergebnisse der verschiedenen Kapitel zusammenfassen, wollen wir vorab kurz auf die Natur der behandelten Problemstellungen sowie auf die Auswahl der verwendeten Methoden eingehen.

Gegenüber statischen bzw. einperiodigen Verkaufsproblemen (wie z.B. dem Dorfman-Steiner Modell, vgl. Dorfman, Steiner (1954)), welche durch die Wahl weniger Entscheidungsgrößen charakterisiert sind, stellen dynamische Optimierungsprobleme in stetiger Zeit i.A. eine größere Herausforderung dar, da die große Menge möglicher Strategien nicht einfach ausgewertet werden kann. Die bekannten Lösungsansätze basieren auf Dekompositionsmethoden und approximativen Verfahren.

Durch die *Diskretisierung* von Zeit- und Aktionsmengen lassen sich die beschriebenen Verkaufsprobleme vergleichsweise einfach numerisch lösen und optimale Strategien approximativ berechnen. In diskretisierten Modellen können die skizzierten Verkaufsprobleme dadurch auch unter sehr komplexen Problemstellungen betrachtet werden. So wurden beispielsweise bereits in den Diplomarbeiten Schlosser (2009) und (2010) diskrete Verkaufsprobleme mit verschiedenen Risiko- und Aktionsrestriktionen gelöst sowie adaptive Lernstrategien für den Fall unbekannter Nachfrage numerisch berechnet.

Der große Nachteil numerischer Modelllösungen ist jedoch, dass keine analytischen Lösungsformeln für die erwarteten Gewinne oder die optimalen Politiken bestimmt werden. Das komplexe Zusammenspiel verschiedener Modellparameter (wie Preiselastizität, Diskontrate, Adoptionseffekt, etc.) kann nur punktuell von Fall zu Fall erfasst werden. Eine grundlegende ökonomische Einsicht kann somit nur in Einzelfällen gewonnen werden. Allgemeine Handlungsempfehlungen können daher nicht gegeben werden.

Dadurch motiviert wollen wir in der vorliegenden Arbeit grundlegende zeitkontinuierliche Preis-Werbemodelle *analytisch* untersuchen und eine theoretische Grundlage für selbige erarbeiten. Da die skizzierten Verkaufsprobleme i.A. nur approximativ gelöst werden können, ist es das Ziel *explizite* Lösungen für *spezielle* Preis-Werbemodelle zu konstruieren. Mit derartigen Modelllösungen können charakteristische Strukturen identifiziert und z.B. die quantitative und qualitative Abhängigkeit optimaler Politiken von Zeit, Restbestand sowie verschiedenen Modellparametern direkt untersucht werden. Anhand der Auswertung optimaler Preis-Werbepolitiken ist es schließlich möglich auch die assoziierten Verkaufsergebnisse analytisch zu erfassen und obige Fragestellungen zu beantworten.

Im Folgenden fassen wir nun die Ergebnisse der Arbeit zusammen, indem wir die wichtigsten Resultate der verschiedenen Kapitel vorstellen. Wir weisen an dieser Stelle daraufhin, dass uns keine expliziten Modelllösungen dynamischer Preis-Werbemodelle bekannt sind, welche zeitabhängige Verkaufs- und Lagerkosten, allgemeine Adoptionseffekte, selbstfinanzierende Regulierungsmechanismen, Oligopolwettbewerb oder Risikoaversion beinhalten.

Den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit stellt der Artikel von MacDonald, Rasmussen (2009) dar. In ihm wird das reine Preismodell von Gallego, van Ryzin (1994) mit zeithomogener Nachfrage – charakterisiert durch exponentiell verteilte Reservationspreise – um eine spezifische Werbekomponente erweitert, welche isoelastische Werbeelastizität widerspiegelt. Der Fakt, dass die Struktur der expliziten Lösungsformeln dieses Preis-Werbmodells ähnlich dem korrespondierenden reinen Preismodell ist, motivierte uns, das *zeitinhomogene* reine Preismodell von McAfee, te Velde (2008) mit konstanter Preiselastizität in ähnlicher Weise um Werbung zu erweitern.

Ein Hauptergebnis des **ersten Kapitels** ist die Lösung des „isoelastischen“ stochastischen Preis-Werbmodells, welches durch Nachfragekomponenten in Cobb-Douglas-Form charakterisiert wird. Sowohl die optimale Politik als auch die zu erwartenden Gewinne können dabei in expliziter Form angegeben werden. Darüber hinaus wurde das Modell von McAfee, te Velde (2008) um Diskontierung erweitert, wodurch der Verkauf auch für unendliche Horizonte analysiert werden kann. Der zu erwartende Verkaufsprozess konnte zudem über effiziente Simulationen hinaus auch theoretisch umfassend ausgewertet werden (Umsatz, Werbeausgaben, Zustandswahrscheinlichkeiten, erwartete Preisentwicklung). Ein besonderes Merkmal des isoelastischen Modells ist dabei, dass es im Falle ohne Produktionskosten bei Anwendung der optimalen Politik stets zum *vollständigen* Abverkauf kommt.

Die in der Arbeit von McAfee, te Velde (2008) enthaltenen Ansätze zur Analyse der sozialen Effizienz sowie der Frage, ob es sich für einzelne Kunden lohnt auf fallende Preise zu warten, konnten im verallgemeinerten Preis-Werbmodell weiterentwickelt werden. Eine Qualifizierung der Berechnung der erwarteten Preise, vgl. McAfee, te Velde (2008), führte zu einer substantiellen Verschärfung der Aussage, dass es sich für einzelne Kunden i.A. *nicht* lohnt auf unmittelbar fallende Preise zu warten. Diesen Hinweis darauf hat Preston McAfee aufgegriffen und ein entsprechendes Erratum veröffentlicht, vgl. McAfee, te Velde (2012).

Während im reinen Preismodell die optimale Preispolitik des Monopolisten überraschender Weise *sozial effizient* ist, konnten wir das Phänomen im Preis-Werbemodell qualifizieren und zeigen, dass die optimale Politik nur im Fall *ohne* Werbung sozial effizient ist. Darüber hinaus konnte durch die Einführung zusätzlicher Modellparameter ein Besteuerungs- bzw. Subventionsmechanismus gefunden werden, unter welchem es für rationale Monopolisten optimal ist sozial effizient zu handeln. Insbesondere können dabei Umsatzsteuern mit Werbesubventionen so kombiniert werden, dass sich Subventionskosten und Besteuerungseinnahmen genau ausgleichen; d.h. die Regulierung ist *selbstfinanzierend*. Kapitel 1, d.h. Helmes, Schlosser (2013a), wurde im Journal of Economic Dynamics and Control (JEDC) veröffentlicht.

Die Idee, die der Modelllösung zugrunde liegende Differenzen-Differentialgleichung gegen eine partielle Differentialgleichung konvergieren zu lassen, ermöglicht die Lösung von deterministischen Modellen mit kontinuierlichem Zustand, siehe letzter Abschnitt von Kapitel 1. Ein Vergleich der Lösung des deterministischen Modells mit der Lösung der stochastischen Modellversion verifiziert das Ergebnis von Gallego, van Ryzin (1994) für allgemeinere reine Preismodelle: die (feedback) Preise des stochastischen Modells dominieren die Preise des deterministischen Modells, wohingegen sich die entsprechenden (erwarteten) Gewinne entgegengesetzt verhalten. Hervorzuheben ist, dass die gefundenen Lösungen auch eine exakte Quantifizierung der jeweiligen Unterschiede ermöglicht.

Festzuhalten bleibt, dass die konstruierte Lösung des isoelastischen Preis-Werbemodells sowohl stochastische als auch deterministische Varianten mit verderblichen sowie auch langlebigen Gütern erfasst; das Modell ist somit allgemein genug um Lagerhaltungs- und Marketingprobleme zusammenzuführen und deren typische Facetten miteinander zu kombinieren.

Die eingeführte Diskontierung und die Möglichkeit zustandskontinuierliche Problemvarianten lösen zu können, öffnete die Tür auch im Marketing verbreitete deterministische Markteroberungsmodelle mit unendlichem Horizont zu betrachten. In diesem Kontext entspricht der zu verkaufende Restbestand dem noch ungedeckten Markt. Tatsächlich sind auch die angenommenen konstanten Preis- und Werbeelastizitäten im Marketing durchaus verbreitet.

Ein wesentlicher im obigen Modell nicht berücksichtigter Einfluss sind zustandsabhängige Dynamiken, mit welchen spezifische Ansteckungs- und Sättigungseffekte (Bass Modell, Sethi Modell) in der Nachfrage modelliert werden können. Das durch diesen Umstand motivierte Modell, siehe **Kapitel 2**, enthält einen solchen zusätzlichen Adoptionsfaktor in der Nachfragerate, wodurch Marktmodelle mit Produktneueinführungen unter Berücksichtigung von verschiedenen Adoptionsdynamiken beschrieben werden können. Die konstruierte explizite Modelllösung ist separabel in Zeit und Bestand. Sie erweitert die Arbeit von Sethi et al. (2008) in drei wesentlichen Punkten: (i) allgemeine Adoptionsdynamiken, (ii) die zusätzliche Internalisierung von Zeitinhomogenitäten und (iii) die Möglichkeit auch verderbliche Produkte betrachten zu können.

Ein weiteres in diesem Zusammenhang zu erwähnendes Resultat ist die allgemeine Auswertung der (feedback) Modelllösung durch die Bestimmung der optimalen Bestandsevolution. Sämtliche Größen, insbesondere die optimalen Kontrollen können damit direkt als Funktion der Zeit (in *open loop* Form) ausgedrückt werden. Die Formeln offenbaren, wie sich die beiden fundamentalen Effekte des Modells – d.h. die Zeitabhängigkeit (Saisonalität, Produktlebenszyklus, etc.) und der Einfluss des

Sättigungsgrades des Marktes – auf die optimale Politik auswirken. Während Wertefunktion und optimale Werbeausgaben im Wesentlichen von der Zeitinhomogenität bestimmt werden, ist der optimale Preispfad hauptsächlich durch die Ansteckungsdynamik geprägt. Die resultierende Verkaufsrate und damit die Entwicklung der Marktsättigung ist von beiden Effekten geprägt und kann ebenfalls exakt analysiert werden. Kapitel 2, d.h. Helmes, Schlosser, Weber (2013), wurde im European Journal of Operational Research (EJOR) veröffentlicht.

Die dritte eingangs erwähnte Arbeit zum Thema, d.h. Krishnamoorthy et al. (2010), analysiert für einen spezifischen Adoptions- bzw. Sättigungseffekt einen Duopolwettbewerb für den Verkauf langlebiger Güter in einem deterministischen Markteroberungsmodell. In **Kapitel 3** wird das Modell auf n Firmen und allgemeine Adoptionsdynamiken zu erweitern. Dadurch ist es möglich sehr viel allgemeinere Wettbewerbsszenarien analytisch zu untersuchen.

Die Lösung des Modells (d.h. das Nash-Gleichgewicht) basiert auf der Bestimmung der individuellen Marktmacht der einzelnen konkurrierenden Firmen. Dabei wird die *Existenz und Eindeutigkeit* eines mehrdimensionalen Fixpunktes bewiesen. Die Lösung ist von folgender separabler Struktur: die Wertefunktion der einzelnen Firmen setzt sich aus einem für alle Firmen identischen Bestandsfaktor und einem individuellen Marktmachtkoeffizienten zusammen. Eine detaillierte Sensitivitätsanalyse ermöglicht die Identifizierung und Bewertung von Wettbewerbs-faktoren bzw. -vorteilen. Zudem gelingt die Darstellung der Modelllösung in open loop Form, d.h. für alle konkurrierenden Marktteilnehmer kann die Evolution von Preisen, Werberaten und akkumulierten Verkäufen direkt angegeben werden. Kapitel 3, d.h. Helmes, Schlosser (2013b), wurde in diesem Jahr zur Veröffentlichung eingereicht.

In **Kapitel 4** wird der simultane Verkauf verschiedene Klassen von Produkten mit isoelastischer Nachfrage untersucht (*Mehrproduktmodell*). Das stochastische dynamische Problem wird dabei mit einer übergreifenden Werbekomponente betrachtet. Zudem können verschiedene Adoptionseffekte, Stückkosten und Lagerkosten berücksichtigt werden. Es wird sowohl der Verkauf von verderblichen als auch von langlebigen Gütern untersucht.

Für zwei Modelle mit endlichem bzw. unendlichem Zeithorizont leiten wir Lösungsformeln für die erwarteten Gesamtgewinne und die optimalen Rückkopplungssteuerungen her. Darüber hinaus werden Simulationstechniken und Verfahren zur Berechnung von Zustandswahrscheinlichkeiten genutzt, um optimal gesteuerte Abverkaufsprozesse auszuwerten.

Die Lösung beider Modellvarianten basiert auf der Berechnung der Wertefunktion für mehrdimensionale Zustandsräume. Hierfür stellen wir ein rekursives Verfahren vor und zeigen, wie sich Existenz und Eindeutigkeit der bestimmten Lösung nachweisen lässt. Im zeithomogenen Fall mit unendlichem Horizont kann das Verfahren auch auf andere Nachfrageklassen übertragen werden.

In **Kapitel 5** untersuchen wir das deterministische monopolistische Modell mit exponentieller Nachfrage. In Erweiterung der Arbeiten von Gallego, van Ryzin (1994) und Berman, Hu, Pang (2013) betrachten wir neben isoelastischer Werbung auch zeitabhängige Produktionskosten und Ankunftsrate. In der Lösung des Modells ist grundlegend zwischen Über- und Unterbeständen zu unterscheiden. Man kann zeigen, dass es im Überbestand optimal ist die Gewinnrate zu maximieren und nicht den kompletten Restbestand zu verkaufen, wohingegen im Unterbestand ein vollständiger Abverkauf optimal ist.

Unter der Strukturannahme, dass sich der optimale Preis im Unterbestand synchron zur zeitlichen Entwicklung der Produktionskosten entwickelt, kann zusammen mit der Annahme des vollständigen Ausverkaufs am Ende des Verkaufshorizonts, die optimale Lösung konstruiert werden. Die assoziierte Wertefunktion liefert dabei die explizite Lösung einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung.

Unter Einbeziehung der Konsumentenrente untersuchen wir auch die soziale Effizienz der hergeleiteten optimalen Strategien des Monopolisten (vgl. McAfee, te Velde (2006) für den exponentiellen stochastischen reinen Preisfall). Wir stellen fest, dass der Monopolist im Unterbestand selbst im Fall endogenisierter Werbung *sozial effizient* handelt. In den übrigen Fällen geben wir wieder Mechanismen an, die zu sozialer Effizienz führen. Wir zeigen insbesondere, dass ganze Klassen selbstfinanzierender Regulierungen existieren, welche sich aus Umsatzsteuern und der Subvention von Produktionskosten- und Werbeausgaben zusammensetzen.

Das formulierte Modell kann neben der zusätzlichen Betrachtung von Restwerten für übrige Verkaufseinheiten auch um zeitabhängige *Lagerkosten* erweitert werden. Wir stellen eine allgemeine Transformation vor, welche es erlaubt, die Lösung des erweiterten Modells auf die des Basismodells mit spezifischen Produktionskosten zurückzuführen.

Als weiteren Effekt untersuchen wir in **Kapitel 6 Risikoaversion** im Rahmen spezieller monopolistischer Preis-Werbemodelle. Dabei beschreiben wir die Wahrnehmung von Gewinnen durch die klassische exponentielle Nutzenfunktion, welche konstante absolute Risikoaversion impliziert.

Als stochastische Version des in Kapitel 5 vorgestellten Verkaufsproblems greifen wir das Modell von MacDonald, Rasmussen (2009) auf, welches Verkaufsintensitäten mit exponentieller Preiswirkung in Verbindung mit isoelastischer Werbewirkung annimmt. Neben Risikoaversion erweitern wir das Modell um zeitabhängige Produktionskosten und Ankunftsrate.

Es gelingt das Modell explizit zu lösen und analytisch auszuwerten. In Anlehnung an die Fragestellungen kann dabei analysiert werden, wie stark sich die Gewinnverteilung bei steigender Risikoaversion konzentriert. Diese Schar an möglichen Gewinnverteilungen bildet eine geeignete Entscheidungsgrundlage um Strategien und die mit ihnen verbundenen Risikoprofile *gezielt* auszuwählen.

In Analogie zum isoelastischen Fall bestimmen wir die Verteilung der Verkaufszeitpunkte, um u.a. erwartete Preisentwicklungen über die Zeit zu berechnen. Solange noch mehr als ein Artikel zu verkaufen ist und die Produktionskosten nicht in der Zeit fallen, zahlt es sich (wie im isoelastischen Fall, vgl. Kapitel 1) *nicht* aus auf unmittelbar fallende Preise zu spekulieren. Im Gegensatz zum isoelastischen Modell ist i.A. aber kein vollständiger Abverkauf zu erwarten (selbst im Falle ohne Stückkosten). Im risikoneutralen Fall können in diesem Zusammenhang sogar explizite Formeln für die Wahrscheinlichkeit eines Ausverkaufs angegeben werden. Wir zeigen ferner, dass die verallgemeinerte Lösung des stochastischen Modells für Verkaufseinheiten beliebig kleiner Größe gegen eine *zweiteilige* Grenzfunktion konvergiert, welche die Lösung des deterministischen „exponentiellen“ Modells mit kontinuierlichem Zustandsraum beschreibt.

Im Hinblick auf die Fragestellungen fassen wir die erzielten Ergebnisse zusammen:

- die Lösungen stochastischer bzw. deterministischer Preis-Werbemodelle sind durch die Lösung von Differenzen-Differential- bzw. partiellen Differentialgleichungen charakterisiert
 - optimale Politiken können auf verschiedene Weisen ausgewertet werden:
in stochastischen Modellen: Bestimmung von Zustandswahrscheinlichkeiten sowie der Verteilung von Verkaufszeitpunkten, erwartete Preise, Erstellung von Simulationen;
in deterministischen Modellen: Bestands-/Preisevolution, Gewinnakkumulation
 - ohne Lagerkosten gibt es eine Sättigung im Bestand bzgl. der (erwarteten) Gewinne
 - Lagerkosten können allgemein in zeitabhängige Stückkosten transformiert werden
 - allgemeinere zeithomogene Modelle mit unendlichem Horizont sind rekursiv lösbar
 - für große Stückzahlen konvergieren stochastische Modelle gegen deterministische Modelle
- (i) Auswertung quantitativer und qualitativer Einflüsse
- optimale Preis- und Werbeanpassungen verlaufen i.A. gegenläufig synchron
 - Adoptionseffekte spiegeln sich vornehmlich in der optimalen Preisentwicklung wider
 - Zeitinhomogenitäten in der Ankunftsrate korrespondieren mit optimalem Werbeeinsatz
 - Lagerkosten führen zu einer mit der Zeit abklingenden Verkaufsgeschwindigkeit
 - Restwerte für übrig gebliebene Einheiten resultieren in höheren Preisen
 - wenn die Stückkosten nicht in der Zeit steigen, lohnt es sich für einzelne Kunden i.A. nicht auf fallende Preise zu warten
- (ii) Soziale Effizienz
- für kleine Bestände (Unterbestand) sind optimale monopolistische Strategien sozial effizient
 - es existieren geeignete und selbstfinanzierende Regulierungsmechanismen
 - je höher Bestand und Werbeelastizität der Nachfrage desto teurer ist die Regulierung
- (iii) Oligopolwettbewerb
- stärkerer Wettbewerb führt zu einer Reduzierung der Preise; aber nur im Falle exogener Werbung auch zu einer schnelleren Markteroberung
 - Wettbewerbsvorteile können identifiziert und Marktmachtfaktoren bewertet werden
- (iv) Risikoaversion
- Risikoaversion führt zu kleineren Preisen sowie einem schnelleren und höheren Abverkauf
 - Risikoaversion führt zu einer Konzentration der Gewinnverteilung

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die verschiedenen Modelle und ihre expliziten Lösungen dazu beigetragen haben die verschiedenen Fragestellungen (für Spezialfälle) beantworten zu können. Die vorliegenden analytischen Ergebnisse tragen dazu bei, das komplexe Zusammenspiel verschiedener sich überlagernder Effekte in den betrachteten dynamischen Preis-Werbemodellen zu erfassen und besser zu verstehen. Darüber hinaus ist denkbar, dass sich die angewandten Methoden und Techniken auch auf verwandte Problemstellungen des Revenue Managements übertragen lassen.

Literatur

- Bagwell, K. (2007). *The Economic Analysis of Advertising*. Handbook of Industrial Organization, Elsevier.
- Berman, O., M. Hu, Z. Pang (2013). *Up then Down: The Bid-Price Trends in Revenue Management*. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2232171>.
- Dorfman, R., P. O. Steiner (1954). *Optimal Advertising and Optimal Quality*, American Economic Review 44, 826-836.
- Gallego, G., G. van Ryzin (1994). *Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons*. Management Science 40, 999-1020.
- Gönsch, J., R. Klein, C. Steinhardt (2009). *Dynamic Pricing – State-of-the-Art*. Zeitschrift für Betriebswirtschaft 79, special issue 3, 1-40.
- Helmes, K., R. Schlosser (2013a). *Dynamic Advertising and Pricing with Constant Demand Elasticities*. Journal of Economic Dynamics and Control 37, 2814-2832.
- Helmes, K., R. Schlosser (2013b). *Oligopoly Advertising and Pricing in Isoelastic Adoption Models*. Preprint, zur Veröffentlichung eingereicht.
- Helmes, K., R. Schlosser, M. Weber (2013). *Dynamic Advertising and Pricing in a Class of General New-Product Adoption Models*. European Journal of Operational Research 229, 433-443.
- Huang, J., M. Leng, L. Liang (2012). *Recent Developments in Dynamic Advertising Research*. European Journal of Operations Research 220 (3), 591-609.
- Krishnamoorthy, A., A. Prasad, S. P. Sethi (2010). *Optimal Pricing and Advertising in a Durable-Good Duopoly*. European Journal of Operational Research 200, 486-497.
- MacDonald, L., H. Rasmussen (2009). *Revenue Management with Dynamic Pricing and Advertising*. Production Journal of Revenue and Pricing Management 9, 126-136.
- McAfee, R. P., V. te Velde (2006). *Dynamic Pricing in the Airline Industry*. Handbook on Economics and Information Systems. Elsevier, Amsterdam, 527-570.
- McAfee, R. P., V. te Velde (2008). *Dynamic Pricing with Constant Demand Elasticity*. Production and Operations Management 17 (4), 432-438.
- McAfee, R. P., V. te Velde (2012). *Erratum to Dynamic Pricing with Constant Demand Elasticity*. <http://vita.mcafee.cc/PDF/POMSErratum.pdf>.
- Phillips, R. (2005). *Pricing and Revenue Optimization*. Stanford University Press, Stanford, CA.
- Sethi, S. P., G. L. Thompson (2000). *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics*. Second Edition, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Sethi, S. P., A. Prasad, X. He. (2008). *Optimal Advertising and Pricing in a New-Product Adoption Model*. Journal of Optimization Theory and Applications 139 (2), 351–360.

- Schlosser, R. (2009). *Eine Numerische Analyse der Güte Dynamischer Adaptiver Preispolitiken mit Anwendungen im Internetbasierten Buchhandel*. HU Berlin Diplomarbeit.
- Schlosser, R. (2010). *Dynamische Preisfestsetzung unter Expliziten und Impliziten Risikorestriktionen*. HU Berlin Diplomarbeit.
- Steffenhagen, H. (2006). *Analytische Planung Effektiver und Effizienter Werbemixes*. Zeitschrift für Betriebswirtschaft 76, Heft 5, 499-524.
- Talluri, K. T., G. van Ryzin (2004). *The Theory and Practice of Revenue Management*. Kluwer Academic Publishers.

I Dynamic Advertising and Pricing with Constant Demand Elasticities

K. Helmes and R. Schlosser

Abstract

In this paper we analyze a stochastic dynamic advertising and pricing model with isoelastic demand. The state space is discrete, time is continuous and the planning horizon is allowed to be finite or infinite. A dynamic version of the Dorfman-Steiner identity will be derived. Explicit expressions of the optimal advertising and pricing policies, of the value function and of the optimal advertising expenditures will be given. The general results will be used to analyze the case of impatient customers. Furthermore, particular time inhomogeneous models and homogeneous ones with and without discounting will be examined. We will study the social efficiency of a monopolist's optimal policies and the consequences of specific subsidies. From a buyer's perspective, our analysis reveals that waiting – when looking at (immediate) expected prices – is never profitable should two or more units be available. But we will also prove that the sequence of average sales prices is monotone decreasing. Moreover, the techniques applied to solve the discrete stochastic advertising and pricing problem will be used to solve a related deterministic control problem with continuous state space.

Keywords: dynamic advertising and pricing, optimal deterministic and stochastic control, Dorfman-Steiner identity, constant demand elasticities

1 Introduction

The theory of dynamic pricing of stochastic models in the general context of revenue management is well established, see [30] and the review articles [4], [9] and [28]; for additional references see [5], [21], and the literature cited therein. The theory of how to set optimal advertising rates together with optimal prices when selling perishable products in a stochastic environment is yet still in its infancy, see [19] for an excellent literature review.

However, there is an extensive literature on deterministic advertising models and combined advertising and pricing models, for instance, [23], [2], and many others; see the surveys [20], [10] and [1] for details and annotated bibliographies. These models typically consider the sale of durable goods, the introduction of new goods and the controlled evolution of, for example, the market share of a product with the objective to maximize overall profits. The Sethi model, [26], is a well researched example of a deterministic model and a stochastic model of such kind. The state variable of the Sethi model represents the market share of a product which is driven by Brownian motion and controlled by the rate of advertising effort. The variation of the original model considered in [27]

is an example of a deterministic model where the state is controlled by the marketing instruments advertising and price.

At first glance the traditional revenue management problems, e. g. selling airplane tickets of a particular flight, and classical advertising models, e. g. increasing the market share of a newly introduced product, seem to deal with rather different kind of situations. It will be pointed out in Section 7 that several aspects of the well known models of both camps are but two sides of the same coin. Differences exist in the way state spaces are described and interpreted, the horizon of the control problems, whether or not unit costs are taken into account and, very important, the modeling of the stochastic environment. In the context of classical advertising models stochastic driving forces are often modeled by Brownian motion or more general stochastic diffusion processes. In revenue management the Poisson process and more general jump Markov processes play a prominent role.

For perishable products, [19] is a recent article where simultaneous advertising and pricing decisions are analyzed in a stochastic environment. The stochastic environment is due to the random arrival of customers and their willingness to pay. MacDonald and Rasmussen consider the case when N units of a perishable product are to be sold over a finite horizon T . Their model assumes the initial stock of the product to decrease according to a Poisson type process with time homogeneous intensity λ . For each price value $p \geq 0$ and advertising rate $w \geq 0$ the intensity has the form $\lambda(p, w) = a \cdot w^\delta \cdot e^{-mp}$, $0 \leq \delta < 1$, where a and m are positive constants. The factor aw^δ reflects the (average) number of shoppers which are attracted by advertising to take a look at a product. In the pure pricing version of the model the average number of shoppers is assumed to be equal to the fixed number a . The second factor reflects the force (depending on price) which turn shoppers into buyers. Their intensity function λ is a combination of the classical willingness to pay function considered in [13] and the increasing concave function of the advertising rate with constant elasticity δ . For their model, which is an extension of the pure pricing model studied by Gallego and van Ryzin, MacDonald and Rasmussen derive closed form expressions of the optimal advertising and pricing policies as well as the value function. The value function is defined as the maximum of expected revenue minus expected advertising cost of all policies under consideration. The authors also evaluate a fixed-price, fixed-advertising heuristic which can be easily implemented and can also be used when the demand is stochastic. Their numerical analyses show the performance of this advertising and pricing heuristic for the model considered in [19].

Gallego and van Ryzin [13] analyze dynamic pricing problems with general reservation price distributions for deterministic models as well as for stochastic ones. In particular, see Theorem 2 of [13], they prove the value function of a deterministic pricing problem to dominate the value function of the corresponding stochastic problem. In the special case of exponential demand (i. e. $\lambda(p) = ae^{-mp}$), they prove that optimal prices of a stochastic model (given in feedback form) are larger than the optimal prices of the corresponding deterministic problem, cf. Proposition 3 of [13]. This property also holds in the case with advertising if demand is isoelastic, see below. For isoelastic models we derive analytical expressions of the value function of a deterministic problem and its stochastic counterpart. These analytical formulas make it possible to precisely evaluate the difference between deterministic and expected profits.

In this article we shall look at the situation when the time dependent jump intensity λ of the process of unsold units – a pure “death process” – is of the form $\lambda(t, p, w) = a(t) \cdot w^\delta \cdot p^{-\varepsilon}$ where $a(t) > 0$ is a given deterministic function, $\varepsilon > 1$ and $0 \leq \delta < 1$. This intensity has two important characteristics. Since p is allowed to be any positive number, even arbitrarily small, the factor $p^{-\varepsilon}$ of λ implies that all items will be sold over any finite time interval $[t_0, T]$, $0 \leq t_0 < T$, if the objective is to maximize the expected revenue and no unit cost term is taken into account. Moreover, not only is the advertising elasticity of λ constant, but the price elasticity is constant as well.

The assumption of constant elasticities has far reaching implications. In the case of a stochastic (pure) pricing problem it has been pointed out by McAfee and te Velde [22] that constant price elasticity of demand and zero unit costs imply a monopolist to set socially efficient prices. In the deterministic case, Stiglitz [29] has actually shown that under the same assumptions the optimal pricing strategy coincides with the (perfectly) competitive price. The combination of isoelastic demand and zero (unit) cost implies that optimal sales intensities may be unbounded, and in the deterministic case as well as the stochastic case any initial stock will be always cleared over any given period. If advertising is endogenized, i.e. $\delta > 0$, we will prove this property still holds true but that a monopolist will not choose socially efficient prices. However, in Section 6, we will describe mechanisms which lead to efficient policies by a monopolist. In particular, an adjustment which is a combination of a revenue tax and an advertising subsidy will be proposed which guarantees efficient prices and which is (even) self-financing.

To analyze the problem we extend and generalize results obtained in [22] for the pure pricing model to the case with advertising. The dynamic (pure) pricing model has many applications, see Talluri and van Ryzin [30] for a variety of examples. Applications of models which combine advertising and pricing include, for instance, one-time events which are individually advertised. Examples include ticket sales of singular sporting events (Olympic Games, Champions League soccer games, etc.), special concerts, shows and performances. Fish and fruit markets are other well known examples where combined advertising and pricing activities can be observed almost every day. Not only do prices typically drop close to the end of the sales period but the volume and the frequency of the “shouting” of sellers increases as well. From a general perspective, these examples are special cases of the situation when a decision maker is selling a given number of identical (or very similar) assets over a fixed period of time, and advertising as well as discounting is common. Specific industries include the business of new car dealers at the end of a (car)model year, or sectors of the real estate market. Common practices of realtors and developers, for instance, open houses, newspaper ads, etc., in conjunction with price variations are well known marketing activities. Furthermore, many second-hand businesses, e.g. used-car dealers, etc. face the situation captured by (1.1), cf. [18].

The tactical question of dynamically setting prices and modulating advertising expenditures can be combined with the strategic problem of choosing an optimal capacity (optimal “order quantity” N). This newsvendor-like problem, cf. [24], and see [7] for a recent collection of survey articles on the newsboy problem, will be briefly discussed in Section 3.

The pure pricing model and the combined advertising and pricing model offer the possibility of studying and testing the evolution of various characteristics of these models. Examples of such studies include analyzing the evolution of yet unsold items over time, the dynamics of prices and advertising rates, the distribution of the time of the n -th sale as well the corresponding price and advertising distributions, etc.

Within the class of admissible policies, see Section 2, we are going to identify the best feedback advertising and pricing strategy $(u_t)_t := (w_t, p_t)_t$ for which the expected (discounted) revenue, when selling N copies of the same product, minus the expected advertising expenditures,

$$J(0, N; (u_t)_t) := E \left[\int_0^{\tau \wedge T} e^{-R(t)} \left((v(t)p_t - c) \cdot \lambda(t, p_t, w_t) - k(t)w_t \right) dt \mid X(0) = N \right], \quad (1.1)$$

will be maximized. In expression (1.1) $k(t)$, $v(t)$ are positive functions and $R(t)$ is a nonnegative parameter function; τ is the first (random) time when all items are sold. The time dependent functions offer the possibility to analyze various extensions of the classical models. While the parametrization of (1.1) is not unique the chosen one is useful for many applications, see Section 3. The function $R(t) := \int_0^t r(s)ds$, $r \geq 0$, describes an accumulated discount rate, while k and v allow the modelling of tax or subsidy factors. The nonnegative constant c represents a cost whenever an item is sold.

Besides the model with objective function (1.1) the cases with an additional terminal pay-off or penalty term representing a salvage value of unsold units, or a charge when unsold items have to be discarded are of interest. For the special case when $c = 0$ and there is no terminal pay-off the decision problem can be solved analytically; the more general cases, when (i) $c \neq 0$ and/or (ii) the case with an additional pay-off at time T , can generally only be solved numerically. The fact that analytical solutions can be derived if $c = 0$ is most useful for a better theoretical understanding of such market situations. Analytical solutions also enable analysts to evaluate numerical solution procedures designed to solve problems with general cost expressions. For instance, based on extensive studies it has become apparent that already straightforward discretization schemes of t , p and w , combined with simple-minded reduction ideas, guarantee good numerical results for problems where c is different from zero, and/or additional inventory costs are taken into account.

The basic idea which underlies our analysis of the dynamic joint advertising and pricing problem can be explained by looking at the static version of the problem. The static case was considered in [8] and, nowadays, is a classical textbook example. To this end, let $q(p, w)$ be the demand function of the form $a \cdot w^\delta \cdot p^{-\varepsilon}$. Imagine a firm which is trying to maximize its profit $\pi(p, w) = (p - c)q(p, w) - w$ by setting the price $p > 0$ and advertising expenditure $w \geq 0$ appropriately when the marginal cost is $c > 0$. If $\varepsilon > 1$ and $0 \leq \delta < 1$, the solution of a firm's advertising and pricing problem is given by $\bar{p} = \varepsilon/(\varepsilon - 1)c$ and $\bar{w} = (a \cdot \delta/\varepsilon \cdot \bar{p}^{-(\varepsilon-1)})^{1/(1-\delta)}$; the maximal profit $\bar{\pi} = \pi(\bar{p}, \bar{w})$ equals

$$\bar{\pi} = a^{\frac{1}{1-\delta}} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \frac{1-\delta}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \right)^{\frac{\varepsilon-1}{1-\delta}} c^{-\frac{\varepsilon-1}{1-\delta}}.$$

The way $\bar{\pi}$ depends on c will be exploited when analyzing a particular difference-differential equation in the dynamic setup. There, c will be replaced by an expression which represents an opportunity cost. Note, for the optimal advertising value \bar{w} and the optimal price \bar{p} the Dorfman-Steiner identity holds, i. e. the quotient of (optimal) advertising expenditure and (optimal) revenue equals the ratio of the two elasticities δ and ε :

$$\frac{\bar{w}}{\bar{p} \cdot q(\bar{p}, \bar{w})} = \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Next, consider the dynamic version of this problem when $c = 0$ and N units of a perishable product are to be sold during the period $[0, T]$. Advertising rates $w(t)$ and prices $p(t)$, $0 \leq t \leq T$, are to be chosen such that the sales process controlled by the policy (w_t, p_t) via the intensity λ_t is most profitable, i. e. we maximize the objective (1.1) with $c = 0$. For any $n \leq N$ let $V(t, n)$ denote the value function of the advertising and pricing problem when n units are to be sold during the period $[t, T]$, i. e.

$$V(t, n) := \sup_{(w_s)_s, (p_s)_s} \{J(t, n; (w_s)_s, (p_s)_s)\}.$$

Obviously, the value function V satisfies the boundary conditions $V(T, n) = 0$, $0 \leq n \leq N$, and $V(t, 0) = 0$, $0 \leq t \leq T$. It follows from the general theory of controlled jump Markov processes, for instance, [14], [6] or [12], that V satisfies the Bellman equation

$$r(t)V(t, n) = \dot{V}(t, n) + \sup_{p>0, w \geq 0} \{\lambda(t, p, w)(v(t)p - \Delta V(t, n)) - k(t)w\}; \quad (1.2)$$

here, $\Delta V(t, n) := V(t, n) - V(t, n - 1)$ is the opportunity cost of having, over the same time span $(T - t)$, one unit less to sell. Since for each $t < T$ and $n > 0$ the maximization problem which is part of the Bellman equation is a special case of the static Dorfman-Steiner problem whenever $\Delta V(t, n) > 0$, we obtain the following expressions of the optimal pricing and advertising decisions $p^*(t, n)$ and $w^*(t, n)$:

$$p^*(t, n) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{1}{v(t)} \cdot \Delta V(t, n), \quad (1.3)$$

$$w^*(t, n) = \left(\frac{a(t) \cdot v(t)}{k(t)} \cdot \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{p^*(t, n)} \right)^{\varepsilon-1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}. \quad (1.4)$$

Formulas (1.3) and (1.4) reveal the remarkable fact that optimal dynamic prices and optimal advertising rates are synchronized and inversely proportional to a power of each other. Using the explicit expressions of p^* and w^* one obtains, see Section 3, a *dynamic* Dorfman-Steiner identity in feedback form: For every t , $0 \leq t < T$, and n , $1 \leq n \leq N$,

$$\frac{k(t) \cdot w^*(t, n)}{v(t) \cdot p^*(t, n) \cdot \lambda(t, p^*(t, n), w^*(t, n))} \equiv \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad (1.5)$$

i. e. the advertising rate is pointwise proportional to the revenue rate. This identity will be employed to give a simple proof of a formula of the optimal expected revenue, see Section 4,

but is of course of its own interest. For a dynamic version of the Dorfman-Steiner identity in the context of deterministic advertising and pricing models see [25]. We would like to point out that (1.5) is comparable to the Merton ratio in portfolio analysis. While the Merton ratio indicates how the investor's wealth needs to be continuously (in time) rebalanced between a risky asset and a risk-free one, (1.5) suggests how price adjustments and advertising spending need to be coordinated at any instant.

In the sequel, we shall only analyze deterministic intensities of the product form introduced above. Natural extensions of the advertising and pricing model could include intensities λ with additional random components or models of unknown parameters. Models with such general intensity functions will lead to control problems with partial information, see, for instance, [3], and will be considered in the future.

This paper is organized as follows. A detailed formulation of the general time inhomogeneous model and the precise definition of admissible controls will be given in Section 2. In Section 3 we shall derive explicit formulas of the value function and the optimal advertising as well as pricing policies together with the generalized Dorfman-Steiner identity. Based on the explicit formulas it is easy to prove structural properties of the value function and the optimal policies of certain subclasses of the model. We shall also analyze two special cases of the general problem in greater detail, (i) the model with impatient customers and (ii) the discounted case with infinite horizon.

In Section 4 we derive additional results concerning the optimal sales process, for instance, formulae of the total average revenue and the total average advertising expenditures. Moreover, a recursive formula of state probabilities of time homogeneous models and, following [22], a binomial approximation of the optimal state probabilities will be proposed. The explicit expressions derived in Section 3 can be used to efficiently simulate sales trajectories. Thus one is able to evaluate statistical properties of many quantities of interest, e. g. the j -th sales time, the average number of unsold items at time t and the distribution of the total profit.

In Section 5 we analyze the sequence of optimal expected prices of all sales and we show, for example, that this sequence is monotone decreasing. In light of this result it might come as a surprise that we shall also prove that at any time t it does not pay to wait if there are two or more units left to be sold; see Theorem 5.1. This result extends and qualifies a result by McAfee and te Velde [22].

In Section 6 we study, in the case with advertising, the question whether or not optimal prices chosen by a monopolist are socially efficient, cf. [22] for the pure pricing model. The main result of this section will be a characterization of subsidies and incentives such that a monopolist's actions become socially efficient.

In Section 7 we analyze a particular deterministic advertising and pricing model which is closely related to the stochastic one. We study the case when a finite amount of an infinitely divisible product is sold with a view towards maximizing the corresponding profit.

2 Model Formulation

We begin with a precise formulation of the dynamic advertising and pricing problem. Assume the coefficients $v(t)$ and $k(t)$ to be positive bounded measurable functions. For any given δ , $0 \leq \delta < 1$, assume $a(t)^{1/(1-\delta)}$ to be a positive function and $r(t)$ to be a nonnegative one. Both functions are supposed to be integrable on *any* finite subinterval of $(0, \infty)$. We separately define the set of admissible controls of finite horizon problems and infinite horizon ones. Let $N \in \mathbb{N}$ and $T > 0$ be given. From now on, we assume all functions $p(t, n)$, $1 \leq n \leq N$, $0 \leq t \leq T$, to be positive and measurable on $[0, T]$. The advertising controls $w(t, n)$ are nonnegative measurable functions. Let $\lambda(t, n) := \lambda(t, n; w, p) := a(t)w(t, n)^\delta p(t, n)^{-\varepsilon}$, $1 \leq n \leq N$, where $\varepsilon > 1$ and $0 \leq \delta < 1$ are given; we define $\lambda(t, 0; w, p) := 0$. Throughout, the parameter $\gamma := (\varepsilon - \delta)/(1 - \delta)$ will play a prominent role. Pairs of functions $(w(t, n), p(t, n))$ will be called admissible if – summarized in a nutshell – they satisfy certain integrability conditions. To be precise, if $T < \infty$ the set of admissible controls of (1.1) is given by, $u_t = (w_t, p_t)$,

$$\mathcal{U}_N^{(T)} := \{(u_t)_t \mid \text{Condition 2.1 is satisfied}\}.$$

Condition 2.1 Assume $g(t) := (a(t)v(t)^\varepsilon/k(t)^\delta)^{1/(1-\delta)}$ to be integrable on $[0, T]$. Let r be a nonnegative integrable function on $[0, T]$. The control functions $w = (w_t)_t$ and $p = (p_t)_t$ are assumed to satisfy the following conditions:

- (a) w is a nonnegative and p is a positive measurable function on $[0, T] \times \{1, 2, \dots, N\}$;
- (b) for each n , $1 \leq n \leq N$, $w(\cdot, n)$, $\lambda(\cdot, n)$ and $p(\cdot, n)\lambda(\cdot, n)$ are integrable functions on $[0, T]$.

To define the set of admissible controls for the case when $T = \infty$ we formulate a set of slightly different conditions.

Condition 2.2 Let r be a positive integrable function on any $[0, t]$, $0 \leq t < \infty$; $R(t) = \int_0^t r(s)ds$, and $g(t)e^{-\gamma R(t)}$ is integrable on $[0, \infty)$. The control functions $w = (w_t)_t$ and $p = (p_t)_t$ are assumed to satisfy the following conditions:

- (a) w is a nonnegative and p is a positive measurable function on $[0, \infty) \times \{1, \dots, N\}$.
- (b) $\lambda(\cdot, n)$ is integrable on any interval $[0, t)$, $t > 0$, $1 \leq n \leq N$.
- (c) For any n , $1 \leq n \leq N$, $p(\cdot, n)\lambda(\cdot, n)e^{-R(\cdot)}$ and $w(\cdot, n)e^{-R(\cdot)}$ are integrable functions on $[0, \infty)$.

If $T = \infty$ the set of admissible controls of (1.1) is defined as $u_t = (w_t, p_t)$,

$$\mathcal{U}_N^{(\infty)} := \{(u_t)_t \mid \text{Condition 2.2 is satisfied}\}.$$

Given any admissible control $u_t = (w_t, p_t)$, either for a finite horizon problem or an infinite horizon problem, let $\tau_0 := 0$ and assume τ_j , $1 \leq j \leq N$, to be recursively defined as $\tau_j = \tau_{j-1} + \Delta_j \tau$, where $\Delta_j \tau$ is the j -th (conditionally on τ_{j-1} independent) interarrival time of the nonhomogeneous Poisson process with (control) intensity λ . Let $(X_t)_{t \geq 0}$ denote the jump process with initial value $X(0) = N$ which jumps from $N - j + 1$ to $N - j$ at the random times τ_j , $1 \leq j \leq N$; once the process hits zero it stays at zero. Note, Condition 2.1 and Condition 2.2 imply that if $u = (w, p)$ is admissible the objective value (1.1) will always be a finite number. We call any $u_T^* \in \mathcal{U}_N^{(T)}$, $u_\infty^* \in \mathcal{U}_N^{(\infty)}$ resp., such that

$$J(u_T^*) = \sup_{u \in \mathcal{U}_N^{(T)}} \{J(u)\}, \quad J(u_\infty^*) = \sup_{u \in \mathcal{U}_N^{(\infty)}} \{J(u)\} \quad \text{resp.},$$

an optimal solution of the dynamic advertising and pricing problem.

The Hamilton-Jacobi sufficient conditions, see [12], §3.8, or [6], §VII, will be used to verify that an optimal control exists for each control problem. For the problem under consideration we shall be looking for functions $V(t, n)$, $0 \leq n \leq N$, which are differentiable in t , $0 \leq t < T$, and continuous up to the boundary such that the Bellman equation, see Section 1, is satisfied, and such that for every t and n the values $w^*(t, n)$, $p^*(t, n)$, cf. (1.3) and (1.4), are maximizers of the associated optimization problems.

3 An Analytical Solution of the Model

From now on we shall use the following abbreviations:

$$\eta := \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon}\right)^\gamma \quad \text{and} \quad \xi(t) := g(t) \frac{\eta}{\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)^{\gamma-1}. \quad (3.1)$$

Substituting for the optimal p^* and w^* of the Bellman equation (1.2) the right hand sides of (1.3) and (1.4) the Bellman equation turns into the nonlinear difference-differential equation

$$0 = \dot{V}(t, n) + \xi(t) \cdot \Delta V(t, n)^{1-\gamma} - r(t)V(t, n) \quad (3.2)$$

with the “natural” boundary conditions described in Section 1. Since (3.2) has a similar structure as the Bellman equation of the pure pricing model, see [22], we look for a separable solution $V(t, n)$ which is the product of two factors. One factor should only depend on t , and the other one should be a sequence with index n :

$$V(t, n) = \alpha(t) \cdot \beta_n. \quad (3.3)$$

Hence, $\alpha(t)$ and β_n need to satisfy

$$0 = \dot{\alpha}(t) + g(t) \frac{\eta}{\gamma} \alpha(t)^{1-\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)^{\gamma-1} \beta_n^{-1} (\beta_n - \beta_{n-1})^{1-\gamma} - r(t)\alpha(t),$$

where $\alpha(T) = 0$, $\beta_0 = 0$, and $\beta_n > 0$, if $n \geq 1$. Assuming the identity $((\gamma - 1)/\gamma)^{\gamma-1} \beta_n^{-1} (\beta_n - \beta_{n-1})^{1-\gamma} \equiv 1$ to hold, the resulting equation which determines α is the Bernoulli differential equation

$$\dot{\alpha}(t) = r(t)\alpha(t) - g(t) \frac{\eta}{\gamma} \alpha(t)^{-(\gamma-1)} \quad (3.4)$$

with terminal condition $\alpha(T) = 0$. It can be solved using the substitution $Z(t) = \alpha(t)^\gamma$, and $\dot{Z}(t) = \gamma \cdot \alpha(t)^{\gamma-1} \cdot \dot{\alpha}(t)$. Thus, the two factors of the value function are $\alpha(t) = (\eta \cdot A(t))^{1/\gamma}$, where

$$A(t) := e^{\gamma R(t)} \int_t^T e^{-\gamma R(s)} g(s) ds, \quad (3.5)$$

and $\beta_n := \beta_n(\gamma) := \beta_n(\varepsilon, \delta)$, $n \geq 1$, where $\beta_0 := 0$, and β_n are the implicitly defined positive and monotone increasing solution values of the recursion

$$\beta_n (\beta_n - \beta_{n-1})^{\gamma-1} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\gamma-1}. \quad (3.6)$$

Note, α and β enjoy a remarkable scaling property of the form $\tilde{\beta}_n = \beta_n/M$ and $\tilde{\alpha}(t) = M\alpha(t)$, $M > 0$ fixed, where $(\tilde{\beta}_n)_n$ satisfies the recursion (3.6) with the right hand side multiplied by $M^{-\gamma}$ while $\tilde{\alpha}(t)$ satisfies (3.4) with $\tilde{\eta} = \eta \cdot M^\gamma$.

It is worthwhile to realize that actually both factors of the value function (3.3) are determined by or are related to a Bernoulli differential equation. While the “time-factor” α satisfies (3.4) the “space-factor” β is related to the Bernoulli differential equation $F(x)(F'(x))^{\gamma-1} = ((\gamma-1)/\gamma)^{\gamma-1}$, $x > 0$, $F(0) = 0$, which has the solution $F(x) = x^{(\gamma-1)/\gamma}$. This relationship will be exploited in Section 7.

The next two propositions summarize characteristic and asymptotic properties of β_n and $A(t)$. The proofs of these properties are given in the Appendix or follow directly from the definition. The first two properties listed in Proposition 3.1 have already been proved in [22]; property (iv), inequality (*), is essential for the proof of the main result of Section 6 and (v) is a nontrivial identity which can be proved by induction, cf. [17]. This proof by induction is quite technical and uninspiring. At the end of this section we shall see that this identity is an almost immediate consequence of the explicit formula of the value function of the discounted problem, cf. Theorem 3.1 below.

Proposition 3.1 *Let $\gamma = (\varepsilon - \delta)/(1 - \delta)$. Identity (3.6) implies:*

- (i) *There is a unique positive, strictly monotone increasing sequence $(\beta_n)_{n \geq 0}$ which satisfies (3.6);*
- (ii) *$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{n^{(\gamma-1)/\gamma}} = 1$, i. e. $\beta_n \approx n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Leftrightarrow \beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \approx n$ for large n ;*
- (iii) *The sequence $(\beta_n)_{n \geq 0}$ is strictly concave in n ;*
- (iv) $\left(1 + \beta_n^{-\gamma/(\gamma-1)}\right)^{1/\gamma} < 1 + \frac{1}{\gamma} \beta_n^{-\gamma/(\gamma-1)} \stackrel{(*)}{<} \left(\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}\right)^{1/(\gamma-1)}$
 $\stackrel{(**)}{<} \left(1 + \beta_{n-1}^{-\gamma/(\gamma-1)}\right)^{1/\gamma} < 1 + \frac{1}{\gamma} \beta_{n-1}^{-\gamma/(\gamma-1)}, \quad \text{for all } n \geq 2;$

$$(v) \quad \frac{\gamma-1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \beta_{n-i+1}^{-1/(\gamma-1)} = \beta_n = \sum_{i=1}^n \beta_{n-i+1}^{-1/(\gamma-1)} \left(\prod_{j=1}^i \frac{\beta_{n-j+1}^{\gamma/(\gamma-1)}}{\beta_{n-j+1}^{\gamma/(\gamma-1)} + \frac{1}{\gamma}} \right), \quad \text{for any } n \geq 1.$$

In light of the close relationship between the nonlinear difference equation (3.6) and the associated Bernoulli equation for $F(x)$ property (ii) of Proposition 3.1 can be thought of as a stability result of a nonlinear difference equation. The proof by McAfee and te Velde is somewhat technical. In the Appendix we shall give a more elementary proof of (ii). The left most inequality of the chain of inequalities (iv) is an immediate application of the Bernoulli inequality with an exponent between zero and one, i. e. $\frac{1}{\gamma}$. The other inequalities will be shown as part of the proof of (iv), see Appendix. Note, (**) of (iv) implies the increments of $\beta_n^{\gamma/(\gamma-1)}$ to be bounded by 1 from which the boundedness (by one) of the sequence $\left(\beta_n^{\gamma/(\gamma-1)} / n \right)_n$ follows, cf. (ii). For the special case $\gamma = 2$ there is the simple recursion $\beta_n = \frac{1}{2} (\beta_{n-1} + \sqrt{\beta_{n-1}^2 + 2})$; the analysis of properties of this special sequence is straightforward.

The product representation (3.3) of the maximum expected profit $V(t, n)$ when combined with the property that $(\beta_n)_n$ is a concave sequence, see (3.1) (iii), expresses in analytical form one's intuition that marginal profit decreases in the number of units to be sold.

Proposition 3.2 *The time factor A has the following asymptotic properties:*

$$(i) \quad A(t) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{t} \int_t^T g(s) ds, \quad T < \infty.$$

(ii) *For the time-homogeneous case,*

$$A(t) = \left(a \cdot \frac{v^\varepsilon}{k^\delta} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \frac{1 - e^{-\gamma r(T-t)}}{\gamma \cdot r} \begin{cases} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} & \left(a \cdot \frac{v^\varepsilon}{k^\delta} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} (T - t), \\ \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} & \frac{1}{\gamma \cdot r} \left(a \cdot \frac{v^\varepsilon}{k^\delta} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}. \end{cases}$$

The expression $A(t)$ should be thought of as being a potential which quantifies the effective demand over the sales period $[t, T)$.

Our first theorem offers explicit formulae of the optimal policies and the value function of the general dynamic advertising and pricing problem. They follow from the derivation given above, cf. (3.3), (3.5) and (3.6).

Theorem 3.1 *Under the conditions specified in Section 2, the Dorfman-Steiner identity (1.5) holds; the optimal advertising policy w^* and the optimal pricing policy p^* are given by, $0 \leq t < T$, $n \geq 1$,*

$$w^*(t, n) = \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\delta}} \frac{g(t)}{k(t)} \left(\frac{\beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{A(t)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \stackrel{hom.}{\stackrel{r \equiv 0}{\equiv}} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} a^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{v}{k} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\delta}} \left(\frac{\beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{T-t} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (3.7)$$

$$p^*(t, n) = \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\delta}{\varepsilon-\delta}} \frac{1}{v(t)} \left(\frac{A(t)}{\beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \stackrel{hom.}{r \equiv 0} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} a^{\frac{1}{\delta}} \frac{v}{k}\right)^{\frac{\delta}{\varepsilon-\delta}} \left(\frac{T-t}{\beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (3.8)$$

The value function V which represents the net present value of the firm at time t , $0 \leq t \leq T$, $n \geq 0$, equals

$$V(t, n) = \left(1 - \frac{\delta}{\varepsilon}\right) \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\delta}{\varepsilon-\delta}} \beta_n A(t)^{\frac{1}{\gamma}} \stackrel{hom.}{r \equiv 0} \left(1 - \frac{\delta}{\varepsilon}\right) \left(\frac{\delta^\delta}{\varepsilon^\delta} a \frac{v^\varepsilon}{k^\delta}\right)^{\frac{1}{\varepsilon-\delta}} \beta_n (T-t)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (3.9)$$

Note, Theorem 3.1 provides the analytical underpinning of the claim, see Introduction, that any initial capacity N will always be fully liquidated over any *finite* sales period, no matter how large N or how small T , $T < \infty$, will be. The formulas (3.7) and (3.8) reveal that close to the end of the sales period, i.e. $t \rightarrow T$, optimal pricing policies tend to zero and optimal advertising strategies simultaneously diverge.

Remark 3.1 If $T < \infty$ formulae (3.7) and (3.8) imply that (w^*, p^*) is an admissible policy. For the infinite horizon case with discounting we can take the limit of the expression $A(t)$ for $T \rightarrow \infty$ and deduce the formulas of an optimal pair of controls in $\mathcal{U}_N^{(\infty)}$.

Remark 3.2 If $\delta = 0$, then expressions (3.7) – (3.9) provide the solution formulas of the pure pricing model. Whenever a deterministic advertising rate function $w(t)$ is exogenously specified, its impact on the evolution of the (price) optimized sales process can be quantified. To do so, the arrival rate of the pure pricing model will be multiplied by $w(t)$ and, for the mathematical analysis, advertising expenses will not be relevant. This simple observation ensures that results of this paper on impatient customers, etc. can be applied in the context of revenue studies of the hospitality industry, airline industries and so on.

Remark 3.3 For the time-homogeneous case without discounting, i.e. $a(t) \equiv a$, $v(t) \equiv v$, $k(t) \equiv k$ and $r(t) \equiv 0$, the formulas given in Theorem 3.1 simplify. For any t and for “large” n (see Proposition 3.1 (ii)):

$$\begin{aligned} V(t, n) &\approx \text{const}_V \cdot n^{(\gamma-1)/\gamma} \cdot (T-t)^{1/\gamma}, \\ p^*(t, n) &\approx \text{const}_p \cdot ((T-t)/n)^{1/\gamma}, \\ \text{and } w^*(t, n) &\approx \text{const}_w \cdot ((T-t)/n)^{-(\gamma-1)/\gamma}, \end{aligned}$$

i.e., the ratios of left hand sides and right hand sides converge to 1 if $n \rightarrow \infty$.

These formulas show that the value function V behaves asymptotically like a homogeneous Cobb-Douglas function of degree one in the variable “units to sell” n and the variable “time-to-go” $(T-t)$. The elasticity with respect to n , $(T-t)$ resp., is approximately $(\gamma-1)/\gamma$, $1/\gamma$ resp. The latter result quantifies the saying “Time is Money” for the problem under consideration. The optimal advertising and pricing policies are approximately homogeneous functions of degree zero in the two variables.

Since we have explicit formulas for V , w^* and p^* structural properties of these functions can be easily deduced. It is well known that even in more general cases the following properties – as functions of the inventory level n – are satisfied.

Proposition 3.3 *If the assumptions of Theorem 3.1 are satisfied, then for any t :*

- (i) $V(t, n)$ is a concave and increasing function in n ,
- (ii) $p^*(t, n)$ is a decreasing function, while $w^*(t, n)$ is an increasing function in n .

As far as the variable t is concerned the functions V , p^* and w^* enjoy similar properties. For any t , $0 \leq t \leq T$, let $V^{(0)}(t, n) := e^{-R(t)}V(t, n)$ denote the net present value of $V(t, n)$ at time zero. Note, $V^{(0)}(t, n)$ is obviously a decreasing function in t , while – in general – $V(t, n)$ is not. The fact that $V(t, n)$ is concave (in n) guarantees the existence of an optimal solution of the following newsvendor-like problem: Let $\Gamma, 0 < \Gamma$, denote the cost of one unit of capacity. Consider the following “economic order quantity” problem:

$$\max_{n \in \mathbb{N}_0} \{V(0, n) - \Gamma n\} =: z^*.$$

Formulae (3.9) and (3.6) yield the following ordering policy,

$$n^* = \max \left\{ n \geq 0 \mid \beta_n \leq \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma \cdot \Gamma} \right)^{\gamma-1} (\eta A(0))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}, \text{ i. e.}$$

the largest value for which the change in expected profit is still nonnegative if we increase the decision variable from n to $n + 1$. The corresponding optimal z^* is given by,

$$z^* = \beta_{n^*}(\eta A(0))^{\frac{1}{\gamma}} - \Gamma n^*;$$

η is defined by (3.1). Using the asymptotic formula of β_n , see Proposition 3.1 (ii), the expression of n^* simplifies if n is large. In the homogeneous case we obtain:

$$n^* \approx \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma \cdot \Gamma} \right)^{\gamma} \eta a T, \quad \text{and} \quad z^* \leq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma \cdot \Gamma} \right)^{\gamma-1} \eta a T.$$

The difference between the upper bound and z^* can be large if n is small; whenever n is large this difference is small. These expressions offer the following insight into the modified newsvendor problem. The optimal capacity and the optimal value are approximately proportional to the length of time that a dynamically operating newsvendor intends to sell his stock. The optimal (approximate) inventory value n^* decreases superlinearly in the unit capacity cost Γ .

Proposition 3.4 *If the assumptions of Theorem 3.1 are satisfied, and $n \geq 1$:*

For the time-inhomogeneous model without discounting, i. e. $r(t) \equiv 0$,

- (i) $V(t, n) = V^{(0)}(t, n)$ is a decreasing function in the variable t . If the time derivative of $A^{1/\gamma}$ is a decreasing function in t then V is concave in t .
- (ii) If $v(t)^{-1} \cdot A(t)^{1/\gamma}$ is a decreasing function in t then p^* is decreasing in t as well.

(iii) If $g(t)/k(t) \cdot A(t)^{-1+1/\gamma}$ is an increasing function in t then w^* is increasing in t .

For the time-homogeneous model with discounting, i. e. a, v, k, r are constants,

- (i) $V(t, n)$ is concave in t while, in general, $V^{(0)}(t, n)$ is not; both functions are increasing in a, v and decreasing in k, r .
- (ii) $p^*(t, n)$ is decreasing in t ; it is increasing in a, v and decreasing in k and in r .
- (iii) $w^*(t, n)$ is increasing in t ; it is increasing in a, v, r and decreasing in k .

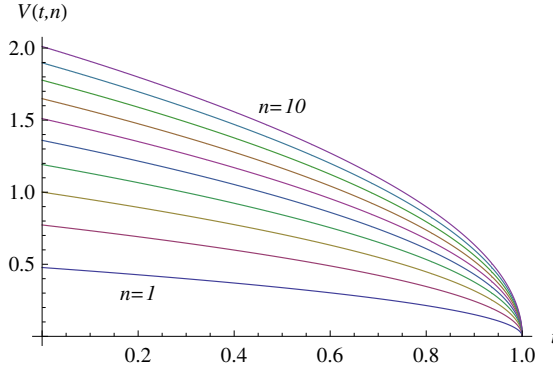


Figure 1: Value function $V(t, n)$; $T = 1$, $N = 10$, $\varepsilon = 1.8$, $\delta = 0.2$, $a = k = v = 1$ and $r = 0$. The top curve shows $V(t, 10)$ and the bottom one $V(t, 1)$.

Figures 1 and 2 illustrate properties of V and the optimal feedback controls p^* and w^* . Note, the concavity of V in n reflects the property that the opportunity cost $\Delta V(t, n)$ decreases with higher stock values. The properties of p^* and w^* can be observed daily at, for instance, fruit markets. Shortly before closing prices decrease and the “shouting” increases. The properties of optimal pricing and advertising strategies as described by Proposition 3.3 and 3.4 are well known among practitioners. The theory highlights and makes precise the fact that the time evolution and the state dependency of both policies are inversely related to each other.

The general model (1.1) is characterized by the time dependent parameters $a(t)$, $r(t)$, $v(t)$ and $k(t)$ which influence the demand intensity, the discount rate and the effective revenue and advertising rates. Compared to the time homogeneous models considered in [13], [19], or the time inhomogeneous pricing model in [22], model (1.1) allows more complex applications and interpretations. For instance, the intensity parameter $a(t)$ can be used to describe product life cycles, seasonal effects or impatient customers. Moreover, due to the discounting parameter $r(t)$ it is possible to analyze problems over an infinite horizon. Finally, the revenue factor $v(t)$ and the advertising factor $k(t)$ can be interpreted as surcharges and/or subsidies. Their impact will be analyzed in greater detail in Section 6 in the context of social efficiency.

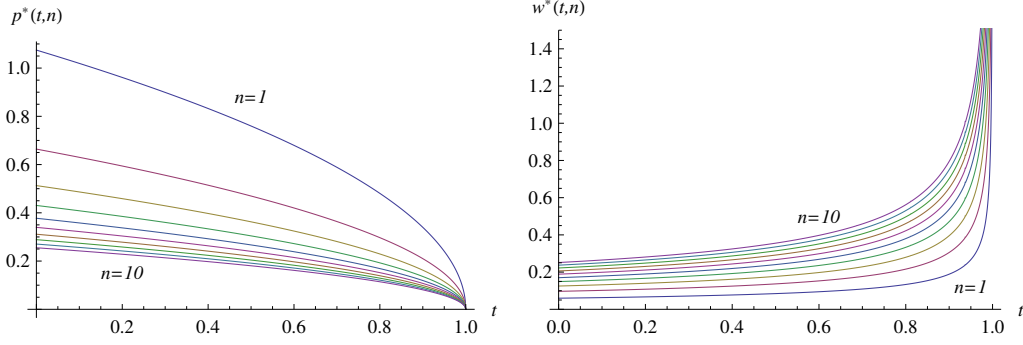


Figure 2: Optimal pricing policy p^* and optimal advertising policy w^* ; $T = 1$, $N = 10$, $\varepsilon = 1.8$, $\delta = 0.2$, $a = k = v = 1$ and $r = 0$. The top graph of the window on the left represents $p^*(t, 1)$ while the graph at the bottom shows $p^*(t, 10)$; the right window shows, from top to bottom, $w^*(\cdot, 10), \dots, w^*(\cdot, 1)$.

There are parameter transformations of the standard model (1.1) which result, for instance, in model formulations without the explicit discounting term $e^{-R(t)}$; there are other transformations which produce a “normal” form of the model, i.e. $v(t) \equiv k(t) \equiv 1$. Certain characteristics, however, often lack a natural interpretation in these transformed models. Moreover, when reversing the transformation, and the correct form of the original value function and optimal policies need to be derived with care.

The standard parametrization (1.1) together with Theorem 3.1, however, make it easy to analyze the impact of different parameter choices and to study the effect of individual parameter variations. In the sequel, let \mathfrak{R} symbolize a given set of parameter functions $a(t)$, $v(t)$, $k(t)$ and $r(t)$. The functions are assumed to satisfy the conditions specified in Theorem 3.1. Let $\tilde{\mathfrak{R}}$ refer to a second set of such functions denoted by $\tilde{a}(t)$, $\tilde{v}(t)$, $\tilde{k}(t)$ and $\tilde{r}(t)$. Let $V_{\mathfrak{R}}$, $p_{\mathfrak{R}}$ and $w_{\mathfrak{R}}$, $V_{\tilde{\mathfrak{R}}}$, $p_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ and $w_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ resp., denote the value function and optimal policies if \mathfrak{R} , $\tilde{\mathfrak{R}}$ resp., is given. By inspection, see Theorem 3.1, the following identities hold, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq n \leq N$,

$$\frac{w_{\tilde{\mathfrak{R}}}(t, n)}{w_{\mathfrak{R}}(t, n)} = \frac{\tilde{g}(t)}{g(t)} \cdot \frac{k(t)}{\tilde{k}(t)} \left(\frac{\tilde{A}(t)}{A(t)} \right)^{\frac{-(\gamma-1)}{\gamma}} \quad \text{and} \quad \frac{p_{\tilde{\mathfrak{R}}}(t, n)}{p_{\mathfrak{R}}(t, n)} = \frac{v(t)}{\tilde{v}(t)} \left(\frac{\tilde{A}(t)}{A(t)} \right)^{1/\gamma}. \quad (3.10)$$

We consider two particular choices of \mathfrak{R} and $\tilde{\mathfrak{R}}$ in greater detail. First, we examine the case of impatient customers. Let $\tilde{k} \equiv k$, $\tilde{v} \equiv v$ and $\tilde{r} \equiv r$ but assume $\tilde{a}(t) = \varphi(t)a(t)$, where φ is a positive, monotone decreasing function defined on $[0, T]$ such that $\varphi(0) = 1$. The function φ reflects growing impatience of customers over time which results in a reduced intensity of customers willing to buy at a given price p . Time dependent accumulated discount expressions are special examples of such functions φ . The next proposition is an immediate implication of the identities (3.10).

Proposition 3.5 *Impatient customers imply lower optimal revenues and reduced optimal prices. For all $n \geq 1$, the optimal advertising policy $w_{\mathfrak{R}}$ dominates $w_{\mathfrak{R}}$ at the beginning of the sales period $[0, T]$ but drops below $w_{\mathfrak{R}}$ at the end if, for example, $\varphi(T) = 0$:*

$$\frac{w_{\mathfrak{R}}(0, n)}{w_{\mathfrak{R}}(0, n)} > 1 > \frac{w_{\mathfrak{R}}(T-, n)}{w_{\mathfrak{R}}(T-, n)};$$

the notation $T-$ refers to taking the limit from the left.

As a second application of Theorem 3.1 it is most instructive to consider the time-homogeneous infinite horizon problem with discounting. We start analyzing how the value function depends on $r \equiv r(t) > 0$, if $T = \infty$. Since the optimal policies are stationary the optimal advertising rates and optimal prices are constant values between consecutive sales. Their values only depend on the number of unsold units prior to the corresponding sale. If T is finite the identities (3.10) and the corresponding ratio of the value function can be used to study the effect of variations of r for the cases with discounting and without discounting.

Proposition 3.6 *For the time inhomogeneous infinite horizon problem with constant discount rate r the optimal advertising rates $w_n^{(\infty)}$ and the optimal prices $p_n^{(\infty)}$, $1 \leq n \leq N$, are independent of t and are given by*

$$w_n^{(\infty)} = \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\delta}} \frac{g^{1/\gamma}}{k} (\gamma r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \beta_n \quad \text{and} \quad p_n^{(\infty)} = \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\delta}{\varepsilon-\delta}} \frac{1}{v} \left(\frac{g}{\gamma r}\right)^{1/\gamma} \beta_n^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Note, the values $w_n^{(\infty)}$ and $p_n^{(\infty)}$ are the limit values of the initial prices and rates of a finite horizon problem when the length of the horizon T tends to infinity. Thus, these expressions provide, for instance, (upper) bounds on initial prices, or suggest values of asking prices. In this context, the present value of a firm with N units to sell, while operating until all items are sold, equals $((\eta \cdot g)/(\gamma \cdot r))^{1/\gamma}$. Hence, the elasticity of the value with respect to r is $-1/\gamma$, and optimal (feedback) prices are decreasing functions of r while advertising rates are increasing ones. The infinite horizon problem with constant discount rate r will again be taken up in the next section.

4 Additional Results

In this section we shall exploit the fact that there is an explicit expression of the optimal sales intensity λ^* of the optimally controlled advertising & pricing model, cf. (3.1), (3.5) and Proposition 3.2, viz.

$$\lambda^*(t, n) := a(t)p^*(t, n)^{-\varepsilon} w^*(t, n)^\delta = \frac{g(t)}{A(t)} \beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (4.1)$$

$$\text{where} \quad \frac{g(t)}{A(t)} = \frac{-\dot{A}(t)}{A(t)} + \gamma \cdot r(t) = \frac{-\dot{A}^{(0)}(t)}{A^{(0)}(t)}, \quad A^{(0)}(t) := e^{-\gamma R(t)} A(t). \quad (4.2)$$

Formula (4.1) together with the dynamic Dorfman-Steiner identity (1.5) makes if possible to characterize and compute several quantities of interest, e. g. the total expected revenue and associated advertising expenditures, etc. Furthermore, for the time-homogeneous case there is a recursive way to compute the state probabilities $q(t, n) := P[X^*(t) = n]$, where $(X^*(t))_t$ denotes the (optimal) process of the number of units still to be sold.

Theorem 4.1 *Let $X^*(0) = N$. In the time-homogeneous case, i. e. v, k, a are positive constants and $r \geq 0$, the probabilities $q(t, n)$ satisfy the recursion, $0 \leq t \leq T$, $1 \leq n \leq N - 1$,*

$$q(t, n) = \left(\frac{1 - e^{-\gamma r(T-t)}}{\gamma r} \right)^{\beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \int_0^t \beta_{n+1}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{1 - e^{-\gamma r(T-s)}}{\gamma r} \right)^{\beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} q(s, n+1) ds,$$

$$\text{where } q(t, N) = \left(\frac{1 - e^{-\gamma r(T-t)}}{1 - e^{-\gamma r T}} \right)^{\beta_N^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}.$$

Proof. See Appendix. ◆

Knowing the state probabilities $q(t, n)$ is important for inventory management as well as for model evaluation. With $q(t, n)$ at hand one can quantify the fluctuations of inventory levels about the average number of unsold items at any time t . Moreover, one can compute quantiles and design tests which will help in the process of model calibration.

For general time dependent functions $v(t)$, $k(t)$, $a(t)$ and $r(t)$ which satisfy the conditions spelled out in Theorem 3.1 there is a most useful approximation of $q(t, n)$, see Proposition 4.1, below. Exploiting ideas of [22] we describe a binomial approximation of $q(t, n)$ for the time inhomogeneous case, and an efficient way to simulate trajectories of the process $(X^*(t))_t$. The approximation is very accurate if both n and $T - t$ are “large”. It yields a simple way to approximate, for instance, the average inventory level.

Proposition 4.1 *For the general advertising \mathcal{E} pricing problem let $A(t)$ be defined by (3.5); we put, see (4.2),*

$$D(t) := e^{-\int_0^t \frac{g(s)}{A(s)} ds} = e^{\int_0^t \frac{\dot{A}^{(0)}(s)}{A^{(0)}(s)} ds} = \frac{A^{(0)}(t)}{A^{(0)}(0)}.$$

Then, $q(t, n) \approx \tilde{q}(t, n) := \binom{N}{n} \cdot D(t)^n \cdot (1 - D(t))^{N-n}$, and $E[X^(t)] \approx N \cdot D(t)$.*

Proof. See Appendix. ◆

In light of Proposition 3.1 (ii), the approximation of $q(t, n)$ by binomial distributions is kind of natural in the time homogeneous case without discounting. If the intensity depends linearly on the state variable n then the inventory process becomes a Yule process and the $q(t, n)$ are binomially distributed. The Yule process is well known from the mathematical theory of evolution, see [11], Chapter 17.

The next theorem deals with the total optimal expected advertising expenditures of a firm as well as with the expected revenue of the business. The formulas are expressed in terms of the value function, see Theorem 3.1, and are derived by exploiting the dynamic Dorfman-Steiner identity (1.5). The theorem is supportive of the time-honored practice of setting the advertising budget equal to a fixed percentage of the expected revenue.

Theorem 4.2 *Consider the model described in Theorem 3.1. We define $W_N^{(T)} := \int_0^{T \wedge \tau} e^{-R(s)} k(s) w^*(s, X(s)) ds$, i. e. the optimal (random) advertising expenditure when N units are to be sold over the time interval $[0, T]$. Let $U_N^{(T)} := \int_0^{T \wedge \tau} e^{-R(s)} v(s) p^*(s, X(s)) dX(s)$ denote the (random) revenue of the business. Then*

$$E \left[W_N^{(T)} \right] = \frac{\delta}{\varepsilon - \delta} V(0, N) \quad \text{and} \quad E \left[U_N^{(T)} \right] = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \delta} V(0, N).$$

Proof. Since for every t and $n \geq 1$ the Dorfman-Steiner identity (1.5) holds the following equation is satisfied along any trajectory $(X(t))_t$:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\delta} k(t) w^*(t, X(t)) &= v(t) p^*(t, X(t)) \lambda^*(t, X(t)) \\ \Leftrightarrow \frac{\varepsilon - \delta}{\delta} k(t) w^*(t, X(t)) &= v(t) p^*(t, X(t)) \lambda^*(t, X(t)) - k(t) w^*(t, X(t)). \end{aligned}$$

Integrating over $[0, T \wedge \tau]$ and taking expectations yields (i); similarly, we obtain (ii). ♦

Remark 4.1 *While it is possible to derive these formulas without using the DS-identity such a proof is fairly involved and rather complicated. The almost trivial proof of the result illustrates the power of the dynamic version of the Dorfman-Steiner identity. This power is also illustrated by the fact that Theorem 4.2 can be strengthened: the results hold for any initial time t_0 , $0 \leq t_0 < T$, and stock level n , $1 \leq n \leq N$.*

Remark 4.2 *The formulas of Theorem 4.2 yield formulas for the infinite horizon case by simply taking the limit when $T \rightarrow \infty$, cf. Remark 3.1.*

To study the distribution of the optimal (random) profit of the general time inhomogeneous model one can rely on simulation studies. There is an efficient way – in the pure pricing context already sketched in [22] – to efficiently simulate trajectories of $(X^*(t))_t$.

Based on the simulated trajectories it is straightforward to provide good estimates of all quantities (related to $X^*(t)$) of interest. The key idea of the efficient simulation algorithm is the observation that realizations of the random times of all sales can be generated as transformed values of independent uniformly distributed random values on $[0, 1]$. To this end, let τ_j , $1 \leq j \leq N$, again denote the (random) time of the j -th sale; let $\tau_0 := 0$ and define $\theta_j := \beta_{N-j+1}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. By definition, the conditional probability that the j -th sale takes place before t , $t \leq T$, while the $(j-1)$ -th sale happened at s , $0 \leq s < t$, is given by

$$\begin{aligned} P[\tau_j \leq t \mid \tau_{j-1} = s] &= \int_s^t e^{-\int_s^u \lambda^*(y, N-j+1) dy} \lambda^*(u, N-j+1) du \\ &= 1 - e^{-\int_s^t \lambda^*(u, N-j+1) du}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Since the optimal intensity $\lambda^*(t, n)$ can be written as $\lambda^*(t, n) = -\theta_{N-n+1} \frac{\dot{A}^{(0)}(t)}{A^{(0)}(t)}$ integrating λ^* , cf. (4.3), yields

$$P[\tau_j \leq t \mid \tau_{j-1} = s] = 1 - \left(\frac{A^{(0)}(t)}{A^{(0)}(s)} \right)^{\theta_j}. \quad (4.4)$$

Hence, $\left(\frac{A^{(0)}(\tau_j)}{A^{(0)}(\tau_{j-1})} \right)^{\theta_j}$ is (conditionally) uniformly distributed on $[0, 1]$. Thus, $A^{(0)}(\tau_j) \sim Z_j^{\theta_j^{-1}} \cdot A^{(0)}(\tau_{j-1})$, where $Z_j \sim U(0, 1)$, holds for $1 \leq j \leq N$. Since $e^{-\gamma R(t)} g(t) = -\dot{A}^{(0)}(t)$ is positive the function $t \mapsto A^{(0)}(t) = e^{-\gamma R(t)} A(t)$ has an inverse function $A^{(0)-1}(t)$ which is positive and strictly monotone decreasing. Using the existence of the inverse function of $A^{(0)}$ and the strong Markov property of the sales process X^* the distributional properties of $(\tau_j)_j$ are a consequence of (4.4).

Proposition 4.2 *Let $(Z_j)_{1 \leq j \leq N}$ be independent uniformly distributed random variables on $[0, 1]$. Let $\tau_0 = 0$ and define τ_j , $1 \leq j \leq N$, recursively,*

$$\tau_j = A^{(0)-1} \left(Z_j^{\theta_j^{-1}} A^{(0)}(\tau_{j-1}) \right).$$

Then the joint distribution of this sequence of isotone random variables is identical to the joint distribution of the jump times of the optimally controlled processes X^ . In particular, $\tau_N < T$ a. e.*

In the time homogeneous case $A^{(0)-1}(y)$ can be explicitly expressed by an elementary formula. Let $g := \left(a \cdot \frac{v^\varepsilon}{k^\delta} \right)^{1/(1-\delta)}$. Note, for $0 \leq y \leq A^{(0)}(0) = \frac{g}{r\gamma} (1 - e^{-r\gamma T})$ the inverse function is given by

$$A^{(0)-1}(y) = -\frac{1}{\gamma r} \ln \left(y \frac{r\gamma}{g} + e^{-r\gamma T} \right).$$

Remark 4.3 *In the time homogeneous case Proposition 4.2 yields the recursion,*

$$\tau_j = \tau_{j-1} - \frac{1}{\gamma r} \ln \left(1 - \left(1 - Z_j^{\theta_j^{-1}} \right) (1 - e^{-\gamma r (T - \tau_{j-1})}) \right), \quad 1 \leq j \leq N.$$

If $T = \infty$ and $r > 0$ this expression simplifies to

$$\tau_j = \tau_{j-1} + \frac{1}{\gamma r} \ln \left(Z_j^{-\theta_j^{-1}} \right) = -\frac{1}{\gamma r} \sum_{i=1}^j \theta_i^{-1} \ln(Z_i);$$

if $r = 0$ and $T < \infty$ we obtain

$$\tau_j = \tau_{j-1} + (T - \tau_{j-1}) \left(1 - Z_j^{\theta_j^{-1}} \right) = T \left(1 - \prod_{i=1}^j Z_i^{\theta_i^{-1}} \right).$$

The simple expressions of $A^{(0)-1}$ make it possible – in particular for the infinite horizon case – to efficiently simulate sales trajectories and to study various distributional aspects of the advertising and pricing problem.

It is again instructive to look at the discounted problem over an infinite horizon in greater detail. We assume that r and a are positive constants. For a given stock level N let $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_N$, $\sigma_j \in [0, \infty)$, denote the random times of the first sale, the second sale, etc. of the optimal sales process. It follows from Theorem 3.1 and Proposition 3.2 – allow $T \rightarrow \infty$ – that the optimal price of the j -th item to be sold is given by, cf. Proposition 3.6,

$$p_j^{(\infty)} := \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \delta} \frac{1}{v} \left(\frac{\eta g}{r \gamma} \frac{1}{\theta_j} \right)^{1/\gamma}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

This (finite) sequence of prices is strictly monotone increasing. By definition, the expected present value $E \left[U_N^{(\infty)} \right]$ of the total revenue $v \cdot \sum_{j=1}^N p_j^{(\infty)} e^{-r \sigma_j}$ can be expressed as the sum of the product of “averaged discount factor” times price multiplied by v ,

$$E \left[U_N^{(\infty)} \right] = v \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \delta} \frac{1}{v} \left(\frac{\eta g}{r \gamma} \frac{1}{\theta_j} \right)^{1/\gamma} E \left[e^{-r \sigma_j} \right].$$

Using the formula of the value function and Theorem 4.2 we can also express the left hand side as

$$E \left[U_N^{(\infty)} \right] = \left(\frac{\eta g}{r \gamma} \right)^{1/\gamma} \beta_N.$$

These two equations imply the identity

$$\beta_N = \sum_{j=1}^N \theta_j^{-1/\gamma} E \left[e^{-r \sigma_j} \right], \quad (4.5)$$

from which the identity (v) of Proposition 3.1 can be derived, see Appendix.

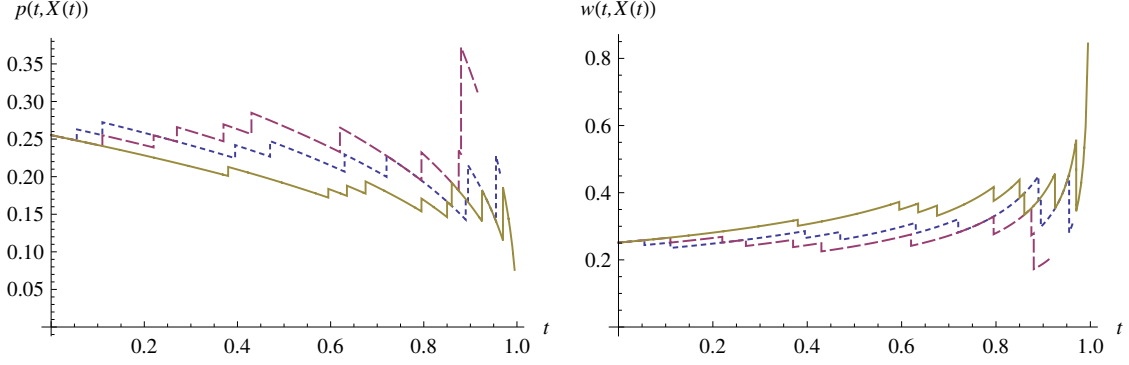


Figure 3: A few simulated optimal price trajectories and associated advertising trajectories of the finite horizon problem; $T = 1$, $N = 10$, $\varepsilon = 1.8$, $\delta = 0.2$, $a = k = v = 1$ and $r = 0$.

If the horizon is infinite optimal price trajectories will always be increasing step functions. The jumps, of course, occur at random times. If, however, the horizon is finite randomness together with the definite deadline T cause price fluctuations.

Figure 3 displays a few simulated price trajectories and associated advertising trajectories which illustrate some of their characteristic properties. Given the stylized market environment described by (1.1) and (4.1) prices are typically more volatile at the end of the selling period. Price trajectories are piecewise continuous paths consisting of segments of the graphs of the family of functions $p^*(\cdot, n)$, see Figure 2. Between sales, prices are decreasing while advertising rates are increasing. Right after each sale there is a price jump and a rate drop. Depending on how quickly the initial stock level N decreases individual prices can be high. Due to the random nature of the purchasing times price fluctuations can be “tame” or rather “wild”, see Figure 3, left panel. The last segment of each price trajectory will be a part of the graph of $p^*(t, 1)$. Thus, although decreasing in time, in principle, the last price can be any number in the interval $(0, p(0, 1))$. The two windows of Figure 3 nicely display the coordinated evolution of optimal advertising spending and price adjustments. The advertising trajectories are kind of a mirror image of the associated price trajectories. Thus, upward, downward resp., price movements go together with downward, upward resp., advertising spending; the two marketing activities affect the sales intensity in a synchronized manner.

5 Waiting and Expected Prices

In this section we want to examine if at any time t (assuming the optimal policy is applied) an individual customer should buy or, instead, wait for better prices to come. The principle which we will use when evaluating waiting is based on the slope of the (conditional) expected prices p^* , i.e. the derivative of the function $s \mapsto E[p^*(s, X_{s-}) \mid X_t = n]$, $s > t$, at t . We shall say that waiting pays off if this slope is non positive. Obviously, if the expected price asked at time $t + h$, $h > 0$, is higher than the current

price waiting is *not* profitable. Since a sale takes place (approximately) with probability $\lambda(t)h$ within time t and $t + h$ this comparison is equivalent to the strict inequality

$$p_n(t) < E[p(t + h, X_{(t+h)-}) \mid X(t) = n] \quad (5.1)$$

$$\Leftrightarrow p_n(t) < \lambda^*(t, n)hp_{n-1}(t + h) + (1 - \lambda^*(t, n)h)p_n(t + h) + o(h).$$

Letting $h \rightarrow 0$ we see that this strict inequality follows from

$$-\dot{p}_n(t) < \lambda^*(t, n)(p_{n-1}(t) - p_n(t)); \quad (5.2)$$

but (5.2) is equivalent to

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\gamma} \dot{A}(t)A(t)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \beta_n^{\frac{1}{1-\gamma}} &< \frac{g(t)}{A(t)} \beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} A(t)^{\gamma-1} \left(\beta_{n-1}^{-\frac{1}{\gamma-1}} - \beta_n^{-\frac{1}{\gamma-1}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\gamma r(t)A(t)}{g(t)} \right) \frac{1}{\gamma} &< \beta_n^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\beta_{n-1}^{-\frac{1}{\gamma-1}} - \beta_n^{-\frac{1}{\gamma-1}} \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

For all positive parameter functions $a(t)$, $k(t)$, $v(t)$ and discount rates $r(t)$ the inequality

$$\left(1 - \frac{\gamma r(t)A(t)}{g(t)} \right) \frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{\gamma}$$

trivially holds. Since

$$\frac{1}{\gamma} \beta_n^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} < \beta_n^{\frac{1}{\gamma-1}} \beta_{n-1}^{-\frac{1}{\gamma-1}} - 1$$

is equivalent to inequality (*) of Proposition 3.1 (iv) condition (5.3) is always satisfied, and the following statement is a qualification of Theorem 4 in [22], see also [23].

Theorem 5.1 *Waiting, in the sense defined above, is never profitable if the inventory level is larger than or equal to 2. The situation when $n = 1$ is also unfavorable for a customer since he might not be able to buy at all should he wait for any period of length h , $h > 0$.*

For $n > 1$ it follows from Theorem 5.1 that for any time interval $[t_0, T]$, $0 \leq t_0 < T$, the (conditional, i.e. there is at least one unit left) expected prices on $[t_0, T]$ are increasing for a while. But since all prices are bounded from above by $p(t, 1)$ we also know that the (conditional) expected prices are always decreasing to zero if $t \rightarrow T$ (see Figure 4). Thus, for risk prone buyers waiting a “long enough” period of time can be profitable; but these customers have to deal with the increasing risk of not being able to purchase an article at all.

Figure 4 shows the plot of $p^*(t, 1)$, the plot of the average price charged (conditioned that at time t there is still at least one unit left to be sold) and the plot of the run-out probability $q(t, 0)$ for two values of r , viz $r = 0$ and $r = 1$ (second window). Numerical computations show the graph of the function of (conditional) expected prices, depending, of course, on the chosen parameters, always has a unimodal shape. For different parameter values and,

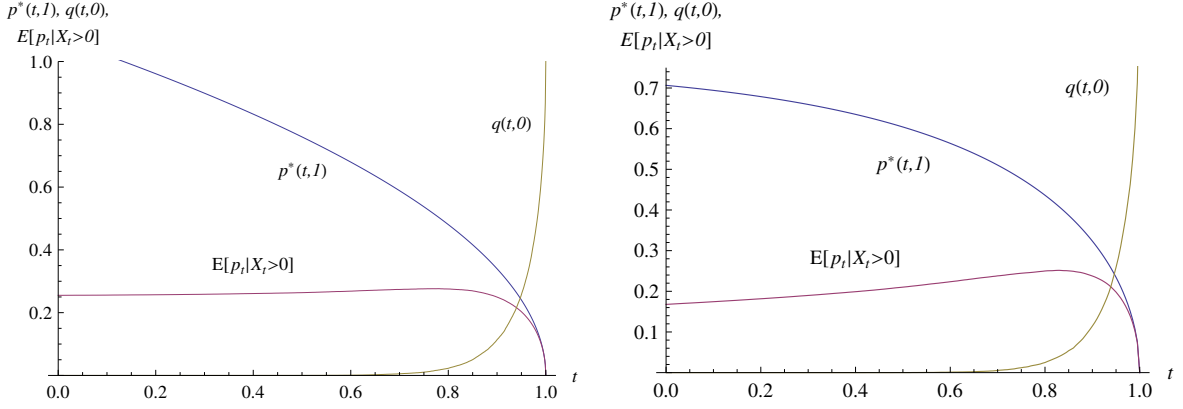


Figure 4: The price envelope $p^*(t, 1)$, (conditional) expected prices und run-out probabilities as functions of time for two values of r , viz. $r = 0$ and $r = 1$ (window on the right); the other parameters are $T = 1$, $N = 10$, $\varepsilon = 1.8$, $\delta = 0.2$, $a = k = v = 1$.

in particular, specific choices of time dependent functions $a(t)$ the hump of $E[p_t | X_t > 0]$ can be more pronounced than the one displayed in Figure 4. Furthermore, if N is large and r is small the time a customer has to wait until lower prices can be expected is usually close to T (see Figure 4). Therefore, it depends on an individual's evaluation of expected prices and the probability of getting no article at all whether or not the customer is going to wait or not. Since one is able to compute (see Theorem 4.1), or approximate (see Proposition 4.1) or simulate (cf. Proposition 4.2) the run-out probabilities $q(t, 0)$ as well as the (conditional) expected prices

$$E(p^*(t, X(t)) | X(t) > 0) = \frac{1}{1 - q(t, 0)} \sum_{n=1}^N q(t, n) p^*(t, n),$$

individual buyers can rationalize their “waiting” strategies. Phrased in a simplified way, waiting is only profitable for customers who are kind of indifferent about being able to buy an article or not. Consequently, for such last minute-customers it would be optimal to wait almost until time T .

The statement of Theorem 5.1 should be compared with the following result. It states that in the finite horizon case without discounting, with discounting resp., the finite sequence of optimal expected sales prices, the expected discounted sales prices resp., is monotone decreasing. At first glance this result seems to contradict the statement about “waiting”. Taking a closer look at both statements reveals the differences between the two results. If the inventory is larger or equal to two then there can be, within any (short) interval, a sale accompanied by an increase in price. Theorem 5.2, however, is about the optimal spacing between consecutive sales and the optimal expected prices of the individual sales of the optimally controlled inventory process.

Theorem 5.2 *Assume the conditions of Theorem 3.1 hold, and let $p_j := p^*(\tau_j, N - j + 1)$ denote the optimal (random) price of the j -th sale. The sequence of expected discounted sales prices $(E[e^{-R(\tau_j)} p_j])_{1 \leq j \leq N}$ is monotone decreasing.*

Proof. In light of (4.4) and by Theorem 3.1, the quotient of any two consecutive discounted sales prices can be written as, $\theta_j := \beta_{N-j+1}^{\gamma/(\gamma-1)}$, $1 \leq i \leq N$,

$$\frac{e^{-R(\tau_{j+1})}p_{j+1}}{e^{-R(\tau_j)}p_j} = \left(\frac{\theta_j}{\theta_{j+1}} \right)^{1/\gamma} \left(\frac{A^{(0)}(\tau_{j+1})}{A^{(0)}(\tau_j)} \right)^{\frac{\theta_{j+1}}{\gamma\theta_{j+1}}}.$$

Since $(A^{(0)}(\tau_{j+1})/A^{(0)}(\tau_j))^{\theta_{j+1}}$ is uniformly distributed, see (4.4), we obtain

$$\begin{aligned} E[e^{-R(\tau_{j+1})}p_{j+1}] &= E \left[e^{-R(\tau_j)}p_j E \left[\frac{e^{-R(\tau_{j+1})}p_{j+1}}{e^{-R(\tau_j)}p_j} \middle| \tau_j \right] \right] \\ &= \left(\left(\frac{\theta_j}{\theta_{j+1}} \right)^{1/\gamma} \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma\theta_{j+1}}} \right) E[e^{-R(\tau_j)}p_j]. \end{aligned}$$

According to Proposition 3.1 (iv) the first factor of the product is less than one. \blacklozenge

6 Social Efficiency

In this section we are going to examine whether the optimal pricing and advertising strategies of a monopolist are socially efficient. More precisely, we are going to identify conditions and model characteristics such that the optimal policies yield efficient prices. To this end, we consider the welfare maximizing variant of model (1.1). The objective function involves the expected consumer surplus ($EC S$) as well as the producer surplus (PS). For the special model under consideration the sum of the price p and the expected consumer surplus $EC S(p)$ is given by

$$\int_p^\infty \frac{x \varepsilon x^{-\varepsilon-1}}{p^{-\varepsilon}} dx = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} p = p + \frac{p}{\varepsilon-1}$$

for any t , from which the expression $EC S(p) = p/(\varepsilon-1)$ follows. The producer surplus equals $PS(t, p) = v(t)p$. Let $S(t, n)$ denote the value function of the welfare maximizing advertising and pricing problem. The function S satisfies the following Bellman equation together with the boundary conditions, $S(T, n) = 0$, $0 \leq n \leq N$, and $S(t, 0) = 0$, $0 \leq t \leq T$,

$$r(t)S(t, n) = \dot{S}(t, n) + \max_{p, w} \left\{ a(t)w^\delta p^{-\varepsilon} \left((v(t) + (\varepsilon-1)^{-1})p - \Delta S(t, n) \right) - k(t)w \right\}. \quad (6.1)$$

Equation (6.1) reveals that the welfare problem is a particular case of model (1.1) with parameters $\tilde{\mathfrak{R}} = \{\tilde{v}(t), \tilde{k}(t), a(t), r(t)\}$, where $\tilde{v}(t) := 1/(\varepsilon-1) + v(t)$ and $\tilde{k}(t) := k(t)$. Hence, the following results concerning social efficiency are a consequence of Theorem 3.1.

Proposition 6.1 *If either the revenue parameter $v(t)$ or the advertising parameter $k(t)$ is time dependent then*

- (i) *in general, a firm's strategies are not efficient, i. e. $w_{\mathfrak{R}}^*(t) \neq w_{\tilde{\mathfrak{R}}}^*(t)$ and $p_{\mathfrak{R}}^*(t) \neq p_{\tilde{\mathfrak{R}}}^*(t)$; this is even the case if $\delta = 0$, i. e. in the pure pricing model.*
- (ii) *socially efficient actions by a monopolist will be guaranteed if his revenue parameter is adjusted to $v_{adj}(t) := v(t) + (\varepsilon - 1)^{-1}$, for instance, by an appropriate subsidy. If ε gets bigger then the subsidy gets smaller.*

Adjusting the parameter v , see above, can be interpreted in different ways. One possibility is to think of lowering a value-added tax, i. e. increasing v . The adjustment described in Proposition 6.1 (ii) is a special one. Additional adjustments of *time independent* parameters v_{adj} and k_{adj} which yield socially efficient strategies w_{adj}^* and p_{adj}^* are suggested by (3.7)–(3.9). The reason is that these identities allow models with different parameters to be compared with each other. For time independent coefficients v and k , and for parameter sets \mathfrak{R} , s. above, as well as $\mathfrak{R}_{adj} = \{v_{adj}, k_{adj}, a(t), r(t)\}$,

$$\frac{p_{adj}^*(t, n)}{p_{\mathfrak{R}}^*(t, n)} = \left(\frac{v_{adj}}{k_{adj}} \frac{\tilde{k}}{\tilde{v}} \right)^{\frac{\delta}{\varepsilon - \delta}} \stackrel{\delta=0}{=} 1 \quad \text{and} \quad \frac{w_{adj}^*(t, n)}{w_{\mathfrak{R}}^*(t, n)} = \left(\frac{v_{adj}}{k_{adj}} \frac{\tilde{k}}{\tilde{v}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \delta}}.$$

Hence, a monopolist's actions are socially efficient whenever

$$\frac{v_{adj}}{k_{adj}} \stackrel{=}{=} \frac{\tilde{v}}{\tilde{k}} = \frac{1/(\varepsilon - 1) + v}{k}. \quad (6.2)$$

Proposition 6.2 *For the pure pricing model a firm's prices are socially efficient for all time independent revenue parameters v ; see [22] for the case without discounting and $v = 1$.*

If $\delta > 0$, condition (6.2) specifies a whole family of pairs (v_{adj}, k_{adj}) of positive parameters which imply socially efficient actions. Possible feasible pairs are appropriate combinations of, for instance, tax decreases and subsidies of advertising activities, or increased charges on advertising spending combined with tax decreases. The different expected transfer payments P_{TR} and W_{TR} (transfer payments to the firm have positive sign, payments by the firm have negative sign) due to the adjustment of v and k depend on v_{adj} and k_{adj} . They amount to, cf. Theorem 4.2, $V_{adj} := V_{adj}(0, N)$,

$$\begin{aligned} P_{TR} &= (1 - v/v_{adj})E[U_{adj}] = (1 - v/v_{adj}) \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \delta} V_{adj}, \\ W_{TR} &= (k/k_{adj} - 1)E[W_{adj}] = (k/k_{adj} - 1) \frac{\delta}{\varepsilon - \delta} V_{adj}. \end{aligned}$$

It follows from (3.8), see Theorem 3.1, and the condition (6.2) that for any such pair (v_{adj}, k_{adj}) the value V_{adj} is proportional to v_{adj} , i. e. $V_{adj} = \text{const} \cdot v_{adj}$, $\text{const} > 0$. Simple

algebra shows the difference of a firm's profit and the sum of expected transfer payments is constant. Pairs $(v_{adj}^{(0)}, k_{adj}^{(0)})$ for which expected transfer payments are compensating, i. e. $TR_{adj} := P_{TR} + W_{TR} = 0$, and prices are socially efficient are of special interest. Such pairs satisfy condition (6.2) as well as the equation

$$1 - \frac{v}{v_{adj}} \equiv \frac{\delta}{\varepsilon} \left(1 - \frac{k}{k_{adj}} \right) \iff k_{adj} = \frac{\delta \cdot k}{\varepsilon \cdot v/v_{adj} - (\varepsilon - \delta)}, \quad (6.3)$$

where v_{adj} and k_{adj} are positive. Elementary calculus implies that there is a unique pair of positive numbers $(v_{adj}^{(0)}, k_{adj}^{(0)})$ which satisfies both conditions as long as v exceeds $\delta/((\varepsilon - \delta) \cdot (\varepsilon - 1))$, viz.

$$v_{adj}^{(0)} = v - \frac{\delta}{(\varepsilon - \delta)(\varepsilon - 1)} \quad \text{and} \quad k_{adj}^{(0)} = k \left(1 - \frac{\varepsilon/(\varepsilon - \delta)}{1 + v(\varepsilon - 1)} \right).$$

Our next theorem summarizes the various results obtained in this Section.

Theorem 6.1 *Let v and k be positive constants.*

(i) *A firm's strategy becomes socially efficient by choosing*

$$\frac{v_{adj}}{k_{adj}} \equiv \frac{1/(\varepsilon - 1) + v}{k}, \quad v_{adj}, k_{adj} > 0.$$

(ii) *For all efficient regulations, the sum of a firm's adjusted expected profit and the total expected transfers TR_{adj} as well as the total expected consumer surplus (TECS) is constant. The latter amounts to*

$$TECS = \frac{1}{(\varepsilon - 1)v_{adj}} \cdot E[U_{adj}] = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1)(\varepsilon - \delta)v_{adj}} \cdot V_{adj}.$$

The optimal total expected welfare S equals $TECS + V_{adj} - TR_{adj}$.

The ratio V/V_{adj} satisfies

$$\frac{V}{V_{adj}} = \left(\frac{v^\varepsilon}{k^\delta} \cdot \frac{k_{adj}^\delta}{v_{adj}^\varepsilon} \right)^{1/(\varepsilon - \delta)} \stackrel{(6.2)}{=} \frac{1}{v_{adj}} \left(\frac{v^\varepsilon}{(1/(\varepsilon - 1) + v)^\delta} \right)^{1/(\varepsilon - \delta)}.$$

(iii) *Let $v > \delta/((\varepsilon - \delta)(\varepsilon - 1))$. The expected transfer costs are zero if*

$$v_{adj}^{(0)} := v - \frac{\delta}{(\varepsilon - \delta)(\varepsilon - 1)} \quad \text{and} \quad k_{adj}^{(0)} := k \left(1 - \frac{\varepsilon/(\varepsilon - \delta)}{1 + v(\varepsilon - 1)} \right).$$

This adjustment requires a revenue tax ($v_{adj}^{(0)} < v$) and an advertising subsidy ($k_{adj}^{(0)} < k$).

Note, there are socially efficient adjustments when the firm actually receives money, and other such adjustments when the firm has to pay money. An extreme case is the following one. If (v_{adj}, k_{adj}) goes to zero while (6.2) holds then (almost all of) a monopolist's profit is taxed away!

7 The Deterministic Model with Continuous State Space

In this final section we consider the advertising and pricing problem when a firm is selling a finite amount of an infinitely divisible product in a deterministic environment. The problem is closely related to the stochastic model considered in the previous sections. To be specific, we consider a deterministic control problem on $[0, T]$ with continuous state space $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. The evolution of the state $x(t)$ is characterized by, $x(0) = N \in \mathbb{R}$, $w(t)$ and $p(t)$ admissible controls,

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} -\lambda(t, p(t), w(t)) & , \quad t < \tau \\ 0 & , \quad t \geq \tau, \end{cases}$$

where $\tau := \inf\{t \mid t \in [0, T], x(t) = 0\}$. Again, cf. Section 2, admissible controls are supposed to satisfy conditions such that the control problem, see below, is well defined and the sufficient optimality conditions can be applied; see [12], chapter 1, for the technical details. Controls are to be chosen such that

$$\int_0^{T \wedge \tau} e^{-R(t)} \left(v(t) \cdot p_t \cdot \lambda(t, p_t, w_t) - k(t) \cdot w_t \right) dt \quad (7.1)$$

is maximized. The Bellman equation for the value function $V(t, x)$ – we denote by \dot{V} , V' resp., the time derivative, space derivative resp., of V – is given by

$$-\dot{V} = \max_{p > 0, w \geq 0} \left\{ a(t) p^{-\varepsilon} w^\delta (v(t) p - V') - k(t) w - r(t) V \right\},$$

together with the terminal condition $V(T, x) = 0$, $N \geq x \geq 0$, and the boundary condition $V(t, 0)$, $0 \leq t \leq T$. Assuming $V'(t, x)$ to be positive whenever $x > 0$, $t \leq \tau$, the necessary optimality conditions of the 2-dimensional nonlinear optimization problem in p and w yield, cf. (1.3) and (1.4),

$$\hat{p}(t, x) = \frac{\varepsilon}{v(t)(\varepsilon - 1)} V'(t, x) \quad \text{and} \quad \hat{w}(t, x) = \left(\frac{a(t)v(t)\delta}{k(t)\varepsilon} \cdot \hat{p}(t, x)^{-(\varepsilon-1)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}. \quad (7.2)$$

Elementary analysis shows that $\hat{p}(t, x)$ and $\hat{w}(t, x)$ actually are unique maximizers for each t and x . Using these expressions for \hat{w} and \hat{p} the Bellman equation turns into the 1st order nonlinear partial differential equation, cf. (3.2),

$$0 = \dot{V} + g(t) \cdot \frac{\eta}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\gamma-1} \cdot (V')^{1-\gamma} - r(t) \cdot V \quad (7.3)$$

with the boundary conditions described above. We can solve this PDE by mimicing the derivation of the value function in the case of a discrete state space and a stochastic evolution of the initial inventory. From the mathematical point of view, the difference between the two cases amounts to replacing the nonlinear difference equation for the β -factor by a Bernoulli equation, cf. Section 3. The following proposition summarizes these observations.

Proposition 7.1 Equation (7.3) has a unique C^1 -solution $V(t, x)$ which is separable in t and x , i. e. $V(t, x) = \alpha(t) \cdot \beta(x)$, where $\alpha(t) = (\eta \cdot A(t))^{\frac{1}{\gamma}}$, cf. Theorem 3.1, and the function $\beta(x)$, $x > 0$, is a solution of the Bernoulli equation, $\beta(0) = 0$,

$$\beta(x)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \beta'(x) = 1 - 1/\gamma.$$

The solution of this differential equation is given by $\beta(x) = x^{(\gamma-1)/\gamma}$. The solution formula of the value function $V(t, x)$ yields the optimal controls \hat{w} and \hat{p} in feedback form. These formulas are identical to (3.7)–(3.9) except that the term β_n needs to be replaced by $x^{(\gamma-1)/\gamma}$. These formulas imply that $\lambda(t, \hat{p}(t, x), \hat{w}(t, x)) = -\frac{g(t)}{A(t)} \cdot x(t)$, and the optimal trajectory of the deterministic control problem satisfies the ODE, see (4.2),

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{\dot{A}^{(0)}(t)}{A^{(0)}(t)}, \quad x(0) = N. \quad (7.4)$$

Hence, by Proposition 4.1 the optimal inventory level, as a function of time, is given by

$$x(t) = x(0)D(t) = N \frac{A(t)}{A(0)} e^{-\gamma R(t)} \stackrel{\text{hom}}{=} N \frac{e^{-\gamma r t} - e^{-\gamma r T}}{1 - e^{-\gamma r T}} \stackrel{r \leq 0}{=} N - \frac{N}{T} t. \quad (7.5)$$

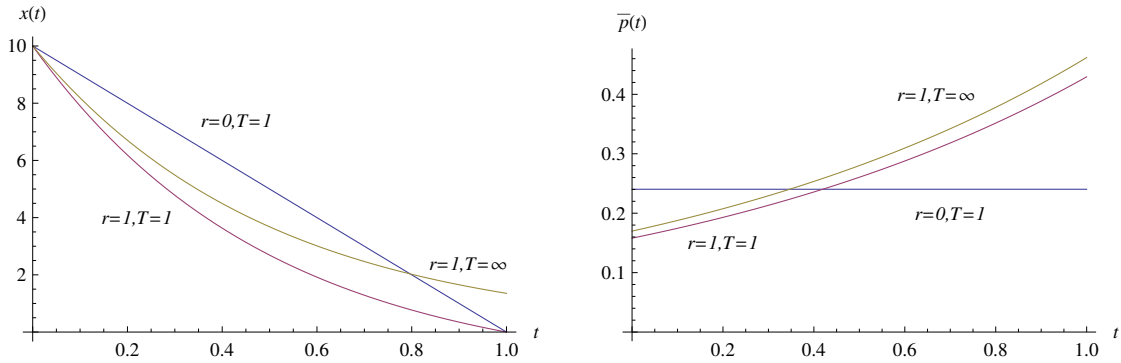


Figure 5: Optimal inventory paths (first window) and corresponding optimal open-loop price trajectories $\bar{p}(t)$; $r = 0$ vs. $r = 1$, and $T = 1$ vs. $T = \infty$. The other parameters are $N = 10$, $\varepsilon = 1.8$, $\delta = 0.2$, $a = k = v = 1$.

Equation (7.4) captures the property that at any time t the relative rate $\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$ of the optimal inventory trajectory equals the relative rate $\dot{A}^{(0)}(t)/A^{(0)}(t)$ of the sales potential. For the case without discounting the optimal inventory level decreases linearly with rate N/T from N to zero over the interval $[0, T]$. For the discounted case the selling rate is higher at the beginning of the sales period and decreases over time, see Figure 5. When the horizon is *infinite* the inventory level N decreases exponentially to zero on $[0, \infty)$ at rate γr . The explicit solution of the inventory level x together with the feedback form of \hat{w} and \hat{p} provide solution formulas of the (optimal) open-loop controls \bar{w} and \bar{p} as functions of t , viz.

$$\bar{w}(t) := \hat{w}(t, x(t)) = \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\delta}} \cdot \frac{g(t)}{k(t)} \cdot \left(\frac{N}{A(0)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot e^{-(\gamma-1)R(t)},$$

$$\bar{p}(t) := \hat{p}(t, x(t)) = \frac{\varepsilon}{v(t)(\varepsilon-1)} \left(\frac{\eta A(t)}{x(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\delta}{\varepsilon-\delta}} \cdot \frac{1}{v(t)} \cdot \left(\frac{A(0)}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot e^{R(t)},$$

where $x(t) = N \frac{A(t)}{A(0)} e^{-\gamma R(t)}$, cf. (7.2) and (7.5). Hence, for time homogeneous models with discounting, i.e. $r > 0$ and $T < \infty$ or $T = \infty$, the optimal advertising rate \bar{w} is an exponentially decreasing function with rate $(\gamma - 1)r$. The optimal prices increase exponentially with rate r , exactly counterbalancing inflation. Note, if $r = 0$ and $T < \infty$ the optimal advertising rate and the optimal price are constant over time! The second window of Figure 5 shows the optimal open-loop controls \bar{p} for three parameter pairs (r, T) , viz. $(0, 1)$, $(1, 1)$ and $(1, \infty)$. The trajectories $\bar{p}(t)$, see Figure 5, are to be compared with the expected prices of the stochastic model, see Figure 4. The graphs illustrate the fact that the time evolution of expected optimal prices in the stochastic case is similar to the evolution of the trajectories $\bar{p}(t)$, except when t gets close to T . The (natural) deviation of the price trajectories at the end of the sales period is due to the discrete state space of the stochastic model and the continuous state space in the deterministic one.

The *fixed* advertising and pricing policy of the deterministic model specifies a sub-optimal pair of strategies $(w_t, p_t) \equiv (\bar{w}, \bar{p})$ of the stochastic model considered in Section 3. Like in the case of the Gallego and van Ryzin pure pricing model, see [13], and the advertising and pricing model analyzed in [19], we can compute the gap between the optimal value, see Theorem 3.1, and the value corresponding to the sub-optimal controls. The value of the expected revenue minus the expected advertising cost for this sub-optimal policy pair can be computed using well known results for a standard Poisson process, see [19] for detailed expressions.

To conclude, we like to point out a close relationship between some classical marketing problems concerning the optimal control of the market share of a durable product and the problem considered in this section. This relationship reveals additional applications of our deterministic model. Let $N = 1$, and think of the controlled inventory process $x(t)$ to represent the untapped market share of a (durable) product. The model considered in this section is a basic one; it illustrates this relationship. General deterministic adoption problems with state dependent dynamic are analyzed in [16]. Differential game extensions of these models will be analyzed in [15].

Acknowledgement

The authors would like to express their appreciation to the referees for their careful reading of the original manuscript and valuable comments.

A Appendix

Proof of Proposition 3.1

(i) By definition, $\beta_n^{\frac{1}{\gamma-1}}(\beta_n - \beta_{n-1}) = \frac{\gamma-1}{\gamma}$. Since β_n , $n \geq 1$, is positive and $\frac{\gamma-1}{\gamma}$ is positive too, the strict inequality $\beta_n > \beta_{n-1}$, $n \geq 1$, follows from the defining identity.

(ii) We recall the property, see the paragraph following Proposition 3.1,

$$\frac{\beta_j^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{j} \leq 1 \iff \frac{j}{\beta_j^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \geq 1, \quad j \geq 1.$$

Moreover, for any given $n \geq 1$, the function $x \mapsto \frac{1}{x} \cdot I_{[1, n+1]}(x)$, $I_{[1, n+1]}(x)$ the indicator function of the interval, is dominated from above by the step function which has the value $1/i$ on the subinterval $[i, i+1]$, $1 \leq i \leq n$, and zero else. Taking the telescoping sum of all differences $\beta_j - \beta_{j-1} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta_j^{-1/(\gamma-1)}$ we obtain for any $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \sum_{j=1}^n \left(\beta_j^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \sum_{j=1}^n \left(j \beta_j^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot j^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &\geq \frac{\gamma-1}{\gamma} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \geq \frac{\gamma-1}{\gamma} \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\gamma}} dx = (n+1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1, \end{aligned}$$

from which (ii) follows.

(iii) According to (i) the sequence $(\beta_n)_{n \geq 0}$ is strictly increasing for all $\gamma > 1$. Since $\beta_n^{\frac{1}{\gamma-1}}(\beta_n - \beta_{n-1}) = \frac{\gamma}{\gamma-1}$, $n \geq 1$, and the right hand side of this identity is a positive *constant* while the first factor of the left hand side of the identity is positive and strictly *increasing* in n , the difference $(\beta_n - \beta_{n-1})$ is positive and strictly *decreasing* in n .

(iv,(*)) The identity (3.6) can be written as

$$\beta_{n-1} = \beta_n \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta_n^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right), \quad (\text{A.1})$$

and (A.1) will be repeatedly applied in the sequel. By (A.1), inequality (iv,(*)) is equivalent to

$$\left(1 + \frac{1}{\gamma} \beta_n^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right)^{-(\gamma-1)} > 1 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \beta_n^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (\text{A.2})$$

Next, we introduce the real valued function $\varphi(x) := (\gamma-1)x + (1+x)^{-(\gamma-1)}$, $x \geq 0$, and we think of $\bar{x} := \frac{1}{\gamma} \beta_n^{-\gamma/(\gamma-1)} > 0$ as a particular argument. It follows by elementary calculus that φ has a unique global minimum at $x = 0$ with value 1, from which (A.2) follows.

(iv,(**)) Using (A.1) once more, (iv,(**)) is equivalent to

$$\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta_n^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} < 1 + \beta_{n-1}^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Thinking of $\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} =: \bar{y} \in (0, 1)$ as a particular argument and using the relation $(\gamma - 1)\bar{x} = 1 - \bar{y}$ the last inequality is equivalent to $\bar{y}^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} < 1 + \gamma\bar{x}\bar{y}^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}}$. This inequality is a particular case of the following functional inequality, $0 \leq y \leq 1$,

$$1 \leq y^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \frac{\gamma}{\gamma-1}(1-y) =: \Phi(y),$$

which is strict if y is an element of the open interval $(0, 1)$. Note, the function Φ is monotone decreasing on $[0, 1]$ and takes on a value bigger than one if $y = 0$, and equals 1 if $y = 1$; this proves inequality (**).

(v) By definition, see end of §4, each τ_j , $1 \leq j \leq N$, is the sum of independent exponential random variables $\Delta_i \tau = \tau_i - \tau_{i-1}$, $1 \leq i \leq N$, $\tau_0 := 0$, with intensity $\mu_i := \frac{r\gamma}{g} \theta_i$. Simple algebra shows that the Laplace transform of τ_k can be expressed as

$$\prod_{i=1}^j \frac{\theta_i}{\theta_i + 1/\gamma} = \prod_{i=1}^j \frac{\beta_{N-i+1}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\beta_{N-i+1}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1/\gamma}.$$

Together with (4.5) this equation implies Proposition 3.1 (v). ◆

Proof of Theorem 3.1

We would like to solve $0 = \dot{\alpha}(t) + g(t) \frac{\eta}{\gamma} \alpha(t)^{1-\gamma} - r(t)\alpha(t)$ with the terminal condition $\alpha(T) = 0$. Rewriting the differential equation in the form $\dot{\alpha}(t) - r(t)\alpha(t) = -g(t) \frac{\eta}{\gamma} \alpha(t)^{1-\gamma}$ and using the substitution $Z(t) = \alpha(t)^\gamma$ we get the equivalent ODE $\dot{Z}(t) - \gamma r(t)Z(t) = -\eta g(t)$ with the terminal condition $Z(T) = 0$. Since its solution is $Z(t) = e^{\gamma R(t)} \int_t^T e^{-\gamma R(s)} \eta g(s) ds$ we obtain $\alpha(t) = Z(t)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\eta e^{\gamma R(t)} \int_t^T e^{-\gamma R(s)} g(s) ds \right)^{\frac{1}{\gamma}}$. ◆

Proof of Theorem 4.1

By definition, $q(0, N) = 1$ and $\dot{q}(t, N) \stackrel{hom}{=} \lambda^*(t)q(t, N) = \frac{\gamma r}{1-e^{-\gamma r(T-t)}} \beta_N^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} q(t, N)$.

Hence, for $n = N$,

$$\begin{aligned} q(t, N) &= e^{-\int_0^t \lambda^*(s, N) ds} \stackrel{hom}{=} e^{-\int_0^t \frac{\gamma r}{1-e^{-\gamma r(T-s)}} \beta_N^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} ds} \\ &= e^{\beta_N^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} (\ln(1-e^{-\gamma r(T-t)}) - \ln(1-e^{-\gamma rT}))} = \left(\frac{1-e^{-\gamma r(T-t)}}{1-e^{-\gamma rT}} \right)^{\beta_N^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}. \end{aligned}$$

For $0 \leq n \leq N-1$, $q(t, n)$ satisfies the linear nonhomogeneous ODE

$$\dot{q}(t, n) = \left(\frac{\gamma r}{1-e^{-\gamma r(T-t)}} \right) \left(\beta_{n+1}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} q(t, n+1) - \beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} q(t, n) \right)$$

whose solution can be written as

$$q(t, n) = \left(\frac{1 - e^{-\gamma r(T-t)}}{\gamma r} \right)^{\beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \int_0^t \beta_{n+1}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{1 - e^{-\gamma r(T-s)}}{\gamma r} \right)^{-\beta_n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1} q(s, n+1) ds.$$

◆

Proof of Proposition 4.1

Let $\tilde{q}(t, N+1) \equiv 0$ and let $\tilde{q}(t, n)$, $1 \leq n \leq N$, denote the solution of the system of ODEs

$$\dot{\tilde{q}}(t, n) = \frac{-\dot{A}^{(0)}(t)}{A^{(0)}(t)} \left((n+1)\tilde{q}(t, n+1) - n\tilde{q}(t, n) \right)$$

with initial conditions $\tilde{q}(0, N) = 1$, $\tilde{q}(0, n) = 0$, $1 \leq n < N$. Since $D(t) := e^{-\int_0^t \frac{g(s)}{A(s)} ds} = \frac{A^{(0)}(t)}{A^{(0)}(0)}$, the identity $\frac{-\dot{D}(t)}{D(t)} = \frac{-\dot{A}^{(0)}(t)}{A^{(0)}(t)}$ holds. Hence, we get $\tilde{q}(t, n) := \binom{N}{n} D(t)^n (1-D(t))^{N-n}$.

◆

References

- [1] Bagwell, K., 2007. The Economic Analysis of Advertising. In: Handbook of Industrial Organization 3 (eds. Armstrong, M. and Porter, R.) Elsevier, 1701-1844.
- [2] Bass, F., 1969. A New Product Growth Model for Consumer Durables. Management Science 15 (5), 215-226.
- [3] Beneš, V., Helmes, K. and Rishel, R., 1995. Pursuing a Maneuvering Target which Uses a Hidden Markov Model for its Control. IEEE Transactions on Automatic Control 40 (2), 307-311.
- [4] Bitran, G. and Caldentey, R., 2003. An Overview of Pricing Models for Revenue Management. Manufacturing & Service Operations Management 5 (3), 203-229.
- [5] Bitran, G. and Mondschein, S. V., 1993. Pricing Perishable Products: An Application to the Retail Industry. MIT Working Paper 2592-2593.
- [6] Brémaud, P., 1980. Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. Springer-Verlag, New York.
- [7] Choi, T.-M., 2012. Handbook of Newsvendor Problems. (International Series in OR & Management Science 176) Springer-Verlag.
- [8] Dorfman, R. and Steiner, P. O., 1954. Optimal Advertising and Optimal Quality. American Economic Review 44, 826-836.

- [9] Elmaghraby, W. and Keskinocak, P., 2003. Dynamic Pricing in the Presence of Inventory Considerations: Research Overview, Current Practices, and Future Directions. *Management Science* 49 (10), 1287-1309.
- [10] Feichtinger, G., Hartl, R. F. and Sethi, S. P., 1994. Dynamic Optimal Control Models in Advertising: Recent Developments. *Management Science* 40 (2), 195-226.
- [11] Feller, W., 1968. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. I, 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney.
- [12] Fleming, W. H. and Soner, H. M., 2006. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York.
- [13] Gallego, G. and van Ryzin, G., 1994. Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons. *Management Science* 40, 999-1020.
- [14] Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., 1979. *Controlled Stochastic Processes*. Springer, New York.
- [15] Helmes, K. and Schlosser, R., 2013. Oligopoly Advertising and Pricing in Isoelastic Adoption Models, preprint.
- [16] Helmes, K., Schlosser, R. and Weber, M., 2013. Optimal Advertising and Pricing in a Class of General New-Product Adoption Models. *European Journal of Operational Research* 229 (2), 433-443.
- [17] Helmes, K. and Templin, T., 2013. Analytical Formulae of the Distributions and Densities of Certain Characteristics of a Dynamic Advertising and Pricing Model, preprint.
- [18] Jerenz, A., 2008. *Revenue Management and Survival Analysis in the Automobile Industry*. Gabler, Wiesbaden.
- [19] MacDonald, L. and Rasmussen, H., 2009. Revenue Management with Dynamic Pricing and Advertising. *Journal of Revenue and Pricing Management* 9, 126-136.
- [20] Mahajan, V., Muller, E. and Bass, F. M., 1990. New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Directions for Research. *Journal of Marketing* 54, 1-26.
- [21] McAfee, R. P. and te Velde, V., 2006. Dynamic Pricing in the Airline Industry. *Handbook on Economics and Information Systems*. Elsevier, Amsterdam, 527-570.
- [22] McAfee, R. P. and te Velde, V., 2008. Dynamic Pricing with Constant Demand Elasticity. *Production and Operations Management* 17 (4), 432-438.
- [23] Nerlove, M. and Arrow, K. J., 1962. Optimal Advertising Policy under Dynamic Conditions. *Economica* 29 (114), 129-142.
- [24] Petruzzi, N. C. and Dada, M., 1999. Pricing and the Newsvendor Problem: A Review with Extensions. *Operations Research* 47, 183-194.

- [25] Schmalensee, R., 1972. The Economics of Advertising. North-Holland, Amsterdam.
- [26] Sethi, S. P., 1983. Short Communications: Deterministic and Stochastic Optimization of a Dynamic Advertising Model. *Optimal Control Applications and Methods* 4, 179-184.
- [27] Sethi, S. P., Prasad, A. and He, X., 2008. Optimal Advertising and Pricing in a New-Product Adoption Model. *Journal of Optimization Theory and Applications* 139 (2), 351-360.
- [28] Shen, Z. M. and Su, X., 2007. Customer Behavior Modeling in Revenue Management and Auctions: A Review and New Research Opportunities. *Production and Operations Management* 16 (6), 713-728.
- [29] Stiglitz, J. E., 1976. Monopoly and the Rate of Extraction of Exhaustible Resources. *The American Economic Review* 66 (4), 655-661.
- [30] Talluri, K. T. and van Ryzin, G., 2004. The Theory and Practice of Revenue Management. Kluwer Academic Publishers.

II Optimal Advertising and Pricing in a Class of General New-Product Adoption Models

K. Helmes, R. Schlosser and M. Weber

Abstract

In [19], Sethi et al. introduce a particular new-product adoption model and determine optimal advertising and pricing policies of an associated deterministic infinite horizon discounted control problem. The authors' analysis is based on the fact that the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation is an ordinary nonlinear differential equation which has an analytical solution. We consider generalizations of their models, e. g. we allow for arbitrary adoption and saturation effects, and solve infinite horizon discounted variations as well as finite horizon variations of associated control problems. If the horizon is finite, the HJB-equation is a 1st order nonlinear partial differential equation with specific boundary conditions. For a fairly general class of models we show that these partial differential equations have analytical solutions and derive explicit formulas of the value function and the optimal policies. The controlled Bass model with constant demand elasticities is a special example of the class of controlled adoption models to be examined and will be analyzed in some detail.

1 Introduction

In [19], Sethi et al. propose a new-product adoption model of durable goods and solve an associated deterministic infinite horizon control problem which involves two marketing instruments: price charged and advertising effort made. The authors assume a particular state dynamic as well as a particular objective function. The state of the system represents (normalized) cumulative sales since a fixed market potential of customers is assumed to be given. Thus, the market share captured by time t can be described by the fraction of the market size, i. e. the state of the system is characterized by a number x within the unit interval. The dynamic, besides depending on the control variables p (price) and w (advertising rate), involves the state in terms of the factor $\sqrt{1-x}$. As explained in [19] the authors choose $\sqrt{1-x}$ as an approximation to the Bass functional term $(1-x)+x(1-x) = 1-x^2$. They assume the discounted profit function to be of the special form

$$\int_0^\infty e^{-rt} (p(t)\dot{x}(t) - w^2(t)) dt,$$

where $p(t)$ and $w(t)$ denote admissible controls, $\dot{x}(t)$ is the rate of change of x , and r is a fixed discount rate. The associated Bellman equation is a nonlinear ordinary differential equation (ODE). For the special cases that the state dynamic is either of the form $\dot{x} = \mu w(t)(1 - \hat{\varepsilon}p(t))\sqrt{1-x(t)}$, $0 \leq p \leq 1/\hat{\varepsilon}$, μ and $\hat{\varepsilon}$ positive parameters, or a special constant elasticity model $\dot{x} = \mu w(t)p(t)^{-\varepsilon}\sqrt{1-x(t)}$, $w(t) \geq 0$, $p(t) > 0$, $\varepsilon > 1$, the ODE has – surprisingly – a very simple explicit solution of the form $const \cdot x$.

In this article we are going to consider generalizations of the authors' model for the isoelastic case and we shall solve the corresponding control problems. The extensions include general adoption and saturation effects, a (slight) generalization of the objective function, time dependent discount rates and, in particular, the corresponding finite horizon problems. If the horizon is finite the associated Bellman equation is a 1st order nonlinear partial differential equation which satisfies specific boundary conditions. The structure which will be assumed, see below, implies that this class of PDEs has separable solutions in time and state.

Our analysis has been strongly influenced and has been motivated by revenue management applications of dynamic pricing. While at first glance adoption models and traditional pricing models seem to be two different worlds, it has been pointed out in [9] that, to some extent, such models are but opposite sides of the same coin: one simply interprets the fraction of the market share still to be captured over the remaining planning horizon as the fraction of yet unsold items of an initial inventory. When selling perishable products it is imperative to look at finite horizon problems. In the context of durable goods, infinite horizon problems are common. However, the marketing of movies or (potentially bestselling) books – entertainment products in general – is closely related to selling perishable products. In [9], finite horizon and infinite horizon problems have been considered simultaneously and we shall do the same in this article. To simplify the transfer of some ideas and results from [9] we shall adopt the following notation throughout: $x(t)$ denotes the (fractional) market share acquired by time t while $y(t) := y_0 - x(t)$ is the fraction of the market still to be captured. Hence, an initial value y_0 , e. g. $y_0 = 1$, should be thought of as selling a given inventory or, equivalently, that nobody has yet purchased the new product and the fraction of potential buyers is one. Motivated by the special power function $\sqrt{1-x}$, see above, we shall consider dynamics of the general form $\dot{y}(t) = -\lambda_t := -\lambda(t, p(t), w(t), y(t)) := -\mu(t)p(t)^{-\varepsilon}w(t)^\delta\psi(y(t))$, $y(0) = y_0$, and profit functions of the form

$$\int_0^T e^{-R(t)}(p(t)\lambda_t - w(t)^a)dt.$$

The horizon T is allowed to be finite or infinite. The different factors of the sales intensity $\lambda(t, p, w, y)$ capture specific aspects of the adoption process. The first term $\mu(t)$, the arrival intensity at time t , is supposed to be a positive function on $[0, T]$. The second and third factors are the control activators. The fourth factor $\psi(y)$ is supposed to be a positive function on the open interval $(0, y_0)$ which satisfies some technical conditions, see Section 2. Together with μ , the system function ψ characterizes the dynamic of the system should prices and advertising rates be constant over time. While the proposed factorization is not unique it is important to observe that we distinguish between a time factor – seasonality is a prominent example of a time influence – and a behavior/communication factor which depends on the present market share, and is described by the function ψ . The innocent looking function μ is most important. It is proportional to the number of people interested in buying the product in a short time interval around t . In applications, μ itself is typically a product or a more complicated expression depending on several quantities. It includes, for instance, a proportionality factor which commensurates dollars spent on advertising and generated revenue. Moreover, the price p and the

advertising effort w will usually be chosen relative to some reference price level p_0 and average advertising rate w_0 . A change of variables generates factors $p_0^{-\varepsilon}$ and w_0^δ which will then become part of μ . The reference values p_0 and w_0 do not have to be constants. Reflecting technological advances of the production process or price competition among producers, these levels usually depend on time. As far as the evolution of the reference price level is concerned, it is typically a decreasing function of time. This implies that $\mu(t)$ is often a monotone increasing function, at least for a while. In addition, factors like market presence, consumer sentiment and the income evolution of potential buyers are all important and are assumed to be incorporated in μ , see [8] for a specific model which stresses the aspect of when potential buyers can afford to buy the product. In [2], the authors define the generalized Bass model and introduce a time factor which they call the “current marketing effort”. While related, the two concepts are not the same, cf. Section 6. An alternative model can be developed based on the ideas explained in [4]. Bemmaor proposes mixing specific densities (defined on the non-negative real line) which capture an individual buyer’s propensity to buy, to end up with a density of first-purchase times across heterogeneous consumers. The function μ could be such a density. But other choices are possible too, see [11]. While in some of the illustrative examples to be discussed below we shall – to simplify the presentation or to highlight certain aspects – assume μ to be a constant, the fact that μ is typically a function which depends on time needs to be kept in mind, see the management recommendations in Section 3. The (constant) price elasticity ε will need to exceed 1, while the (constant) advertising elasticity δ has to satisfy the inequalities $0 \leq \delta < a$. It will turn out that the effectiveness-cost ratio $\Delta := \delta/a$ is a critical parameter. There is a non-negative function r which represents a variable discount rate; it determines $R(t) := \int_0^t r(s)ds$. Note, the special parameter setting $\delta = 1$, $a = 2$, $\psi(y) = y^{1/2}$, $r(t) \equiv r > 0$ and $T = \infty$ specifies the model considered in [19].

In Section 4 we analyze the class of general power functions $\psi(y) = y^b$, $b > -(\varepsilon - 1)$, $b \in \mathbb{R}$, and obtain the results of [19] as a particular example when b is set equal to 0.5. Power functions are the best known models to describe the influence of “external” factors or “innovation” on the diffusion of a product. If b is positive, then $\psi(y)$ is increasing in y , i. e. the impact of external factors on the adoption process decreases if more of the (fractional) market has been captured; note, $x = 1 - y$. If b is negative one experiences just the opposite effect. We shall prove that the behavior of the optimal pricing strategy of such models critically depends on the exponent. For *time homogeneous* finite horizon models without discounting, a positive exponent induces a market skimming pricing strategy, i. e. prices are monotone decreasing. If b is negative, then optimal prices will increase monotonically over time. If $T = \infty$ and $r(t) \equiv r > 0$, the critical exponent b^* is no longer zero but equals $(a - \delta)/a$. Hence, optimal prices are constant if $b = b^*$; they are decreasing if $b > b^*$, and they are increasing if $b < b^*$. Power functions and a few other classes of functions are special, since, as will be demonstrated, the characteristic quantities of the optimally controlled system, i. e. the optimal system path $y(t)$, the optimal sales rate $\bar{\lambda}(t)$ along the optimal trajectory y and optimal (open loop) controls $\bar{p}(t)$ and $\bar{w}(t)$ together with the associated value function, all belong to the same function class as ψ . But even very simple polynomial functions ψ pose a challenge. The characteristics of the

optimally controlled systems can no longer be expressed in terms of elementary functions. However, we shall derive explicit expressions of the characteristics in terms of solutions of particular Bernoulli differential equations. We also propose a robust and efficient method to numerically evaluate these expressions. This way, we are able to study the time evolution of very general systems. Based on the analytical expressions to be derived, advertising and pricing recommendations for management will be given.

The behavior function $\psi(y) = \Omega y + \Gamma y(1 - y)$, Ω and Γ real valued constants (typically non-negative), is a special example of a very simple polynomial function. If Ω and Γ are positive, it characterizes the controlled (generalized) Bass model, see [3], [7], [12] and references therein. If $\Omega = \Gamma = 1$ and $\delta = 0$ the general control model becomes a version of the Robinson and Lakhani model [16]. The choice $\Omega = 1$, $\Gamma = 0$, $\delta = 0$ is a generalization of the Sethi and Bass model [18]. The case $\Omega = 0$, $\Gamma > 0$ is the controlled version of Mansfield's model [15]. The general case, $\Omega, \Gamma \geq 0$, $0 \leq \delta < a$, $\varepsilon > 1$, $r(t) \equiv r \geq 0$, and T finite or infinite, will be analyzed in detail in Section 5. Other flexible diffusion models, see Mahajan et al. [14], Table 3, will be studied in greater detail in a future publication; examples will include, among others, the models $\psi(y) = -\Gamma(1 - y) \ln(1 - y)$ and $\psi(y) = y^{1+\kappa}(\Omega + \Gamma(1 - y))$, $\kappa \geq 0$.

This paper is organized as follows. A detailed description of the class of control problems and the notation that will be adopted throughout will be given in Section 2. As a first result we shall state a particular Dorfman-Steiner identity to be employed later on. In Section 3 we shall derive solution formulas of the value function and the optimal policies of the general class of finite as well as infinite horizon problems in feedback form. Closed-form solutions of all characteristics of an optimally controlled system in the time domain will be given too. We shall also sketch the basic ideas of a simple but powerful numerical scheme to compute the evolution of the optimally controlled system. In Section 4 we shall consider the special class of power functions. We shall exploit the general expressions derived in Section 3 and describe the value function and the optimal policies explicitly in terms of elementary functions. A detailed sensitivity study will also be undertaken in this section. In Section 5 we shall analyze the dynamics which motivated the authors of [19] to consider a functional term like $\sqrt{1 - x}$, and we shall analyze versions of the controlled Bass model in some detail. In particular, we shall prove a characterization of the time when optimal prices of the controlled Bass model might peak. In Section 6 we offer some concluding remarks. For general references and literature reviews we refer to [5], [7], [12], [14] and [19]. For (especially) stimulating reading and fundamental ideas pertaining to the present work we refer to [1], [2], [10], [17] and [19].

2 Specification of the Model

We consider a monopolist who introduces a new durable good in a deterministic environment. We choose the proportion of those potential buyers that currently have not yet purchased the product and all potential buyers as state variable of the controlled system. The evolution of the system from its initial position y_0 , e. g. $y_0 = 1$, is supposed

to be governed by the rate of sales $\lambda(t, p, w, y)$. We assume λ to be of the separable multiplicative form $\mu(t)p^{-\varepsilon}w^\delta\psi(y)$ with constant price and advertising elasticities ε and δ . The firm is supposed to choose a positive admissible feedback pricing strategy $p(t, y)$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq t \leq T$, and a non-negative advertising strategy $w(t, y)$ such that the ordinary differential equation

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} -\lambda(t, p(t, y(t)), w(t, y(t)), y(t)) & , \quad t < \tau \\ 0 & , \quad t \geq \tau, \end{cases} \quad (2.1)$$

where $\tau := \inf \{t \mid t \in [0, T], y(t) = 0\}$, has a unique solution. Admissible controls are all control functions p and w such that (2.1), and all integrals to be defined below, are well defined. The objective of the decision maker is to choose an admissible pair of control functions (p, w) such that the *positive* pricing policy $p_t := p(t, y(t))$ and the *non-negative* advertising policy $w_t := w(t, y(t))$ maximize the pay-off

$$\int_0^{T \wedge \tau} e^{-R(t)} p_t \lambda_t dt - \int_0^{T \wedge \tau} e^{-R(t)} w_t^a dt. \quad (2.2)$$

The following conditions are supposed to be satisfied throughout. The function $\mu(t)$ is positive and measurable on $[0, T]$; the horizon T is allowed to be finite or infinite. The parameters are such that $\varepsilon > 1$ and $a > \delta \geq 0$. The function ψ is positive and $\psi^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$ is integrable on the open unit interval $(0, 1)$. There is a non-negative integrable function $r(t)$ which represents a varying discount rate; $R(t) = \int_0^t r(s) ds$, $t \geq 0$.

We shall use dynamic programming, see Fleming and Soner [6], Chapter I, to solve the deterministic optimal control problem given by (2.1) and (2.2). To this end, let $V(t, y)$ denote the value function of the advertising and pricing problem when y is the fraction of the market share that is still to be captured during the period $[t, T]$. Obviously, cf. (2.1), the value function V satisfies the boundary conditions $V(t, 0) = 0$, $0 \leq t \leq T$, and $V(T, y) = 0$, $0 \leq y \leq 1$. It also satisfies the Bellman equation, see [6],

$$r(t)V(t, y) = \dot{V}(t, y) + \sup_{p>0, w \geq 0} \left\{ \lambda(t, p, w, y)(p - V'(t, y)) - w^a \right\}, \quad (2.3)$$

where \dot{V} , V' resp., denotes the time derivative, state derivative resp., of V . For each t and y , assuming $V'(t, y) > 0$, the necessary optimality conditions of the maximization problem (2.3) imply

$$p^*(t, y) := \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} V'(t, y) \quad \text{and} \quad w^*(t, y) = \left(\frac{\delta}{a\varepsilon} \mu(t)\psi(y)p^*(t, y)^{-(\varepsilon-1)} \right)^{\frac{1}{a-\delta}}.$$

Elementary analysis shows that for every (t, y) the control values $p^*(t, y)$ and $w^*(t, y)$ are unique maximizers of the optimization problem which appears on the right hand side of (2.3). The explicit form of the nonlinear PDE (2.3) will be analyzed in Section 3. Exploiting the optimality conditions we obtain a Dorfman-Steiner identity for the rate λ .

Proposition 2.1 *Let $\lambda^*(t, y) := \mu(t)(p^*(t, y))^{-\varepsilon}w^*(t, y)^\delta\psi(y)$, then*

$$\frac{w^*(t, y)^a}{p^*(t, y)\lambda^*(t, y)} = \frac{\delta}{a\varepsilon}. \quad (2.4)$$

The Dorfman-Steiner identity is a powerful result. For instance, it is an immediate implication of (2.4) that in the isoelastic case the optimal revenue and the optimal advertising cost are fixed fractions of the optimal profit over any interval $[t, T]$, $0 \leq t \leq T$, and any initial value y_t , $0 < y_t$, i. e.

$$e^{R(t)} \int_t^T e^{-R(s)} \bar{p}_s \cdot \bar{\lambda}_s ds = \frac{a\varepsilon}{a\varepsilon - \delta} V(t, y_t), \quad \text{and} \quad e^{R(t)} \int_t^T e^{-R(s)} \bar{w}_s^a ds = \frac{\delta}{a\varepsilon - \delta} V(t, y_t).$$

Further applications of (2.4) will be discussed in Sections 3 and 4.

3 Explicit Solution Expressions

From now on we shall use the following abbreviations:

$$\Delta := \frac{\delta}{a}, \quad \gamma := \frac{\varepsilon - \Delta}{1 - \Delta} \quad \text{and} \quad \eta(t) := \gamma \frac{1 - \Delta}{\Delta} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right)^{\gamma-1} \left(\frac{\Delta}{\varepsilon} \mu(t) \right)^{\frac{1}{1-\Delta}}. \quad (3.1)$$

Note, $0 \leq \Delta < 1$, $(\gamma - 1) = \frac{\varepsilon-1}{1-\Delta}$ and $\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\Delta}$. The value function $V(t, y)$ satisfies the HJB equation, cf. (2.3),

$$r(t)V = \dot{V} + \eta(t) \frac{1}{\gamma} V'^{-(\gamma-1)} \psi(y)^{\frac{a}{a-\delta}} \quad (3.2)$$

with the boundary conditions $V(T, y) = 0$, $0 \leq y \leq 1$, and $V(t, 0) = 0$, $0 \leq t \leq T$. Since the nonlinear partial differential equation (3.2) has a similar structure as the difference-differential equations analyzed in [9] and [13], we try a separable solution of the form

$$V(t, y) = \alpha(t)\beta(y).$$

We require β to satisfy the Bernoulli equation, $y \geq 0$,

$$\beta(y)\beta'(y)^{(\gamma-1)} = \psi(y)^{\frac{a}{a-\delta}}, \quad \beta(0) = 0, \quad (3.3)$$

and α to satisfy the Bernoulli equation with terminal condition $\alpha(T) = 0$, $0 \leq t \leq T$,

$$r(t)\alpha(t) = \dot{\alpha}(t) + \frac{\eta(t)}{\gamma} \alpha(t)^{-(\gamma-1)}. \quad (3.4)$$

The following result is an immediate consequence of the equations (3.3) and (3.4).

Lemma 3.1 *Let ψ be a positive measurable function on $(0, 1)$ such that $\psi^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$ is integrable on any subinterval $(0, y)$, $0 < y \leq 1$. Define the diffusion potential,*

$$B(y) := \frac{\gamma}{\gamma - 1} \int_0^y \psi(z)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} dz.$$

Let r be a non-negative measurable function on $(0, \infty)$ such that $R(t) := \int_0^t r(s)ds$ is finite for any $t > 0$. Assume that for any $T > 0$ and $t \in [0, T]$, the time-to-go potential,

$$A^{(0)}(t) := \int_t^T e^{-\gamma R(s)} \eta(s) ds, \quad \text{and the future potential,} \quad A(t) := e^{\gamma R(t)} A^{(0)}(t), \quad (3.5)$$

are well defined. Then

(i) $\beta(y) := B(y)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ solves the nonlinear ODE (3.3);

(ii) $\alpha(t) := A(t)^{\frac{1}{\gamma}}$ solves (3.4) and satisfies $\alpha(T) = 0$.

Remark 3.1 If $r(t) \equiv r > 0$ and $\eta(t) \equiv \eta$, then

$$A(t) = \eta \frac{1 - e^{-\gamma r(T-t)}}{\gamma r} \hat{=} \begin{cases} \xrightarrow{r \rightarrow 0} & \eta(T-t), \\ \xrightarrow{T \rightarrow \infty} & \frac{\eta}{\gamma r}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Simple algebra together with Lemma 3.1 yield the following explicit formulas of the value function and the optimal feedback policies $p^*(t, y)$ and $w^*(t, y)$ of the finite horizon problem. These formulas, combined with (3.6), yield formulas of the optimal policies of the time-homogeneous infinite horizon problem. It is instructive to consider the infinite horizon problem separately, see Corollary 3.1 below, and to display formulas of the future value of $V_{(\infty)}(y)$ and the optimal policies $p_{(\infty)}^*$ and $w_{(\infty)}^*$.

Theorem 3.1 Assume all conditions of Lemma 3.1 to hold. Then, $0 < y \leq 1$, $0 \leq t < T$,

$$p^*(t, y) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} A(t)^{\frac{1}{\gamma}} B(y)^{-\frac{1}{\gamma}} \psi(y)^{\frac{1}{\varepsilon-1}},$$

and

$$w^*(t, y) = \left(\frac{\Delta}{\varepsilon - \Delta} \eta(t) A(t)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} B(y)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{a}}$$

are optimal feedback policies of the control problem specified by (2.1) and (2.2). The value function V is also a product of factors which involve the two potentials,

$$V(t, y) = A(t)^{\frac{1}{\gamma}} B(y)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} =: e^{rt} V^{(0)}(t, y).$$

Corollary 3.1 Let $T = \infty$, $r(t) \equiv r > 0$ and $\eta(t) \equiv \eta$. Then,

$$p_{(\infty)}^*(y) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \left(\frac{\eta}{\gamma r} \right)^{\frac{1}{\gamma}} B(y)^{-\frac{1}{\gamma}} \psi(y)^{\frac{1}{\varepsilon-1}}, \quad \text{and} \quad w_{(\infty)}^*(y) = \left(\frac{\Delta}{\varepsilon - \Delta} \eta \left(\frac{\eta}{\gamma r} \right)^{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} B(y)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{a}};$$

$$V_{(\infty)}(y) := V(y) = \left(\frac{\eta}{\gamma r} \right)^{\frac{1}{\gamma}} B(y)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Since we have explicit formulas of the optimal policies of the finite horizon model and the infinite horizon one we can compute the optimal rates of sales of both cases. These rates can be concisely described in terms of the derivatives of the log-transforms of the functions $\beta(y)$ and $A^{(0)}(t)$. The following formulas are easily deduced from Theorem 3.1.

Proposition 3.1 *The optimal rates of sales λ^* , if $T < \infty$, and $\lambda_{(\infty)}^*$, if $T = \infty$, are given by:*

$$\lambda^*(t, y) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\beta(y)}{\beta'(y)} \left(\frac{-\dot{A}^{(0)}(t)}{A^{(0)}(t)} \right), \quad \text{and} \quad \lambda_{(\infty)}^*(y) = r(\gamma - 1) \frac{\beta(y)}{\beta'(y)}.$$

Proposition 3.1 enables us to solve the differential equation which characterizes an optimal trajectory $y(t)$, i. e.,

$$\dot{y}(t) = -\lambda^*(t, y(t)), \quad y(0) = y_0 \in [0, 1]. \quad (3.7)$$

It is an important property of the model analyzed and a consequence of the constant demand elasticity of price combined with the option to set prices arbitrarily low, that the optimally controlled system will always capture the full market potential over any given finite time interval $[0, T]$, i. e. $y(T) = 0$, no matter if T is small or large.

Theorem 3.2 *Assume all conditions of Lemma 3.1 to hold. Then the optimal trajectory $y(t)$ of the finite horizon problem with initial value y_0 is given by, $0 \leq t \leq T$,*

$$y(t) = B^{-1} \left(B(y_0) \frac{A^{(0)}(t)}{A^{(0)}(0)} \right). \quad (3.8)$$

Proof. Using Proposition 3.1, the differential equation (3.7) is equivalent to

$$\beta'(y(t))\dot{y}(t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \overline{\ln(A^{(0)}(t))}^\cdot \beta(y(t)).$$

Thus, $Z(t) := \beta(y(t))$ is the solution of the linear initial value problem

$$\dot{Z}(t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \overline{\ln(A^{(0)}(t))}^\cdot Z(t), \quad Z(0) = \beta(y_0).$$

It is given by

$$Z(t) = \beta(y_0) \left(\frac{A^{(0)}(t)}{A^{(0)}(0)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (3.9)$$

By definition of β , equation (3.9) is equivalent to

$$B(y(t)) = B(y_0) \frac{A^{(0)}(t)}{A^{(0)}(0)}. \quad (3.10)$$

Since B has an inverse function B^{-1} , formula (3.8) follows. ◆

Remark 3.2 While (3.8) offers a closed form solution formula of the trajectory $y(t)$, identity (3.10) suggests a robust algorithm to compute monotone decreasing step functions which are an accurate approximation of $y(t)$ for basically any function $\psi^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$. For any t and initial value y_0 the right hand side of (3.10) can be computed off-line. Numerical integration methods provide functional values of $B(y)$. Discretizing the interval $[0, 1]$ and choosing, for any given t , a value $y(t)$ belonging to the grid such that $B(y(t))$ is the best approximation to $B(y_0) \cdot A^{(0)}(t)/A^{(0)}(0)$ yields a step function which approximates the solution of (3.7) as accurately as the grid allows it to do.

Theorems 3.1 and 3.2 together with Proposition 3.1 enable us to compute the optimal open loop controls $\bar{p}(t) := p^*(t, y(t))$ and $\bar{w}(t) := w^*(t, y(t))$, when $y(t)$ solves (3.7), for an arbitrary initial value y_0 . Moreover, we can evaluate V along the optimal trajectory; $\bar{V}(t) := V(t, y(t))$ is the continuation value which captures the accumulated (optimal) profits from t onwards. We derive several important relationships between all these quantities. These results will be further exploited in the next section. The upcoming formulas are derived using Theorem 3.1 and identity (3.10). From a practitioner's point of view these results are most helpful. They provide the analytical underpinning of the management recommendations to be given below. In particular, the results reveal that for time homogeneous finite horizon models without discounting and for any feasible function ψ the optimal advertising rate is constant over time. Moreover, for this particular case \bar{V} is a straight line with negative slope. If the arrival intensity factor μ is time independent then these formulas can be further simplified, see Subsection 4.3.

Theorem 3.3 *Let the assumptions of Lemma 3.1 hold. Then*

$$\begin{aligned}\bar{V}(t) &= A^{(0)}(t)e^{R(t)} \left(\frac{B(y_0)}{A^{(0)}(0)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \\ \bar{p}(t) &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} e^{R(t)} \psi(y(t))^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \left(\frac{B(y_0)}{A^{(0)}(0)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}, \\ \bar{w}^a(t) &= \frac{\Delta}{\varepsilon-\Delta} \eta(t) e^{-(\gamma-1)R(t)} \left(\frac{B(y_0)}{A^{(0)}(0)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \\ \bar{\lambda}(t) &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \eta(t) e^{-\gamma R(t)} \psi(y(t))^{-\frac{1}{\varepsilon-1}} \frac{B(y_0)}{A^{(0)}(0)}.\end{aligned}$$

Proof. We shall prove the formula for \bar{V} . The other three formulas can be derived by the same kind of reasoning. Due to the Dorfman-Steiner identity, cf. Proposition 2.1, it is actually sufficient to verify just one of these three formulas; any of the other two will then follow. Employing Theorem 3.1 and expression (3.10) we get

$$\begin{aligned}\bar{V}(t) := V(t, y(t)) &= A(t)^{\frac{1}{\gamma}} B(y(t))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ &= e^{R(t)} A^{(0)}(t)^{\frac{1}{\gamma}} B(y_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\frac{A^{(0)}(t)}{A^{(0)}(0)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ &= e^{R(t)} A^{(0)}(t) \left(\frac{B(y_0)}{A^{(0)}(0)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.\end{aligned}$$

◆

Corollary 3.2 *Let $\mu(t) \equiv \mu > 0$ and $r(t) \geq 0$.*

- (i) *If $T < \infty$ and $r(t) \equiv 0$, then $\bar{w}(t)$ is a constant and $\bar{V}(t)$ is a linear function with negative slope.*
- (ii) *If $T = \infty$ and $r(t) > 0$, then $e^{(\gamma-1)R(t)}\bar{w}^a(t)$ and $e^{-R(t)}\bar{V}(t)$ are both constant functions; in particular, $\bar{w}(t)$ is monotone decreasing.*
- (iii) *Except for the special case when $\psi(y) \equiv 1$ optimal prices are dynamic, i. e. they (typically) change with time.*

Remark 3.3 *The discounted optimal prices $\bar{p}(t)$ depend explicitly on the current evaluations of the market share by the system function ψ but – surprisingly – not directly on the fluctuations of $\mu(t)$ (for \bar{p} , only the time-to-go potential matters). Prices, of course, depend on the magnitude of the arrival intensity. For instance, should the constant value of μ double then prices will increase by a certain percentage depending on the parameters of the model.*

The optimal advertising rate $\bar{w}(t)$, the continuation value $\bar{V}(t)$ resp., is isochronous with $\mu(t)$, with $A^{(0)}(t)$ resp., but both characteristics do not directly depend on the current diffusion value $\psi(y(t))$ (for \bar{w} , it is only the diffusion potential $B(y_0)$ that matters), although both quantities – through B – depend on the magnitude of ψ .

The optimal trajectory is characterized by the property that at any time t , $0 \leq t \leq T$, the ratio of the remaining diffusion potential and the initial one equals the ratio of the time-to-go potential at t and its initial value. The characterization of $\bar{\lambda}$ in the time domain reveals the following extraordinary feature of the controlled problem when no other constraint but positivity is imposed on p : While the adoption rate of the uncontrolled system is proportional to $\psi(y(t))$, the rate of the optimally controlled system is proportional to a power of its reciprocal! This property has to be recalled when one is looking at graphs of $\bar{\lambda}$. At this point it is also useful to recall the Dorfman-Steiner identity, see Proposition 2.1, since the graphs of all three functions, $\bar{\lambda}(t)$, $\bar{p}(t)$ and $\bar{w}(t)$, are interconnected.

For the stylized model considered in this article Theorem 3.3 justifies the following management recommendations. Additional recommendations can be given for special subclasses of the general case, see Subsection 4.3.

MR I (advertising): Optimal advertising spending should be synchronized with arrival intensity. *Without discounting*, if μ is constant then the optimal advertising rates should not change over time (the optimal rates are constant). In general, *with discounting*, advertising spending should be reduced if the discounting term dominates the arrival intensity. The exact values of \bar{w} depend on the non trivial interplay of both terms.

MR II (pricing): Whenever the controlled system explicitly depends on the state of the system then optimal pricing strategies are dynamic. Optimal price paths will be monotone increasing whenever the behavior function ψ is monotone decreasing (in y); discounting intensifies the growth of prices, see Section 4 and 5 for simple examples. A

skimming strategy, i. e. prices are monotone decreasing, is optimal whenever ψ is monotone increasing and the discount rate is zero. *With discounting*, the interplay of both factors will determine the price trajectory. The system function ψ together with the discount rate r determine whether or not a market *penetration pricing strategy* with increasing prices during the first phase of the adoption process followed by a phase of declining prices will be optimal, see Section 5 for examples and details. A large price elasticity value ε flattens the optimal price path. To reduce price variations large elasticity values should be chosen in early stages of prelaunch advertising studies.

4 The Class of Power Functions $\psi(y) = y^b$

Motivated by the case $\psi(y) = y^{1/2}$, recall $y = 1 - x$, cf [19], we shall derive explicit formulas of \bar{V} , \bar{p} , \bar{w} , etc., whenever $\psi(y) = y^b$, $b > -(\varepsilon - 1)$, and $a > \delta \geq 0$. The lower bound on b guarantees that $y^{\frac{b}{\varepsilon-1}}$ is integrable in a neighborhood of zero, cf Lemma 3.1. A negative power b of the system function ψ is associated with a stylized model which emphasizes the “imitation force” of the adoption process, while positive values of b fit market situations when “innovation” is the driving force of the product diffusion. For the class of general power functions ψ , explicit expressions of the results derived in Section 3, see Theorems 3.1 and 3.2, are obtained by elementary calculations. All these expressions turn out to be power functions as well. The class of exponential functions is a second example of system functions ψ where all these expressions have the same functional form (in y). Due to the elementary form of all these functions they can be evaluated to any precision by using any of the standard math packages, and the accuracy of computations by general numerical methods can be checked against these numbers. Hence, the class of power functions is an ideal test-bed for the numerical procedure sketched in Remark 3.2. We like to point out that all plots displayed in this section and the next one are based on the numbers computed by this method. The results are excellent when compared with the analytical ones and provide credibility to all other numerical computations.

4.1 Power functions combined with a general factor $\mu(t)$

The following two preliminary results together with Proposition 4.1 and Theorem 4.1 summarize the results of the elementary calculations referred to above. These results display all power expressions as functions of time and of the initial value y_0 in detail. The first lemma follows by definition and simple integration. The second one shows that for power functions ψ the optimal rate of sales expressed in feedback form is a linear function of y , a fact which is an immediate consequence of Lemma 4.1 and Proposition 3.1. Since the rate of sales function is linear in y , see Lemma 4.2, one can easily compute the optimal state trajectory $y(t)$ for any initial value. Once the state trajectory is known the results of Section 3 give the formulas of all characteristics, e.g., the optimal price path $\bar{p}(t) := p^*(t, y(t))$, the optimal advertising trajectory $\bar{w}(t) := w^*(t, y(t))$, etc.

Lemma 4.1 Let $a > \delta \geq 0$, $b > -(\varepsilon - 1)$ and $\psi(y) = y^b$, $0 \leq y \leq 1$. Then

$$\beta(y) = \left(\frac{\varepsilon - \Delta}{b + \varepsilon - 1} \right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\Delta}} \cdot y^{\frac{b+\varepsilon-1}{\varepsilon-\Delta}} \quad \text{and} \quad B(y) = \left(\frac{\varepsilon - \Delta}{b + \varepsilon - 1} \right) y^{1+\frac{b}{\varepsilon-1}}.$$

Lemma 4.2 The optimal rates of sales $\lambda^*(t, y)$ and $\lambda_{(\infty)}^*(y)$ are given by

$$\lambda^*(t, y) = \frac{\varepsilon - 1}{b + \varepsilon - 1} \frac{\eta(t)}{A(t)} \cdot y, \quad \text{and} \quad \lambda_{(\infty)}^*(y) = \frac{\varepsilon - 1}{b + \varepsilon - 1} \gamma r \cdot y.$$

Proposition 4.1 For any $y_0 \in (0, 1]$, $0 \leq t \leq T$,

$$y(t) = y_0 \left(\frac{A^{(0)}(t)}{A^{(0)}(0)} \right)^{\frac{\varepsilon-1}{b+\varepsilon-1}},$$

and if $\mu(t)$ and $r(t)$ are constants, we obtain the explicit formulas

$$y(t) = \begin{cases} y_0 \left(\frac{e^{-\gamma r t} - e^{-\gamma r T}}{1 - e^{-\gamma r T}} \right)^{\frac{\varepsilon-1}{b+\varepsilon-1}}, & \text{if } r \geq r \text{ and } T < \infty \\ y_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{\frac{\varepsilon-1}{b+\varepsilon-1}}, & \text{if } r = 0 \text{ and } T < \infty \\ y_0 e^{-\frac{(\varepsilon-1)\gamma r}{b+\varepsilon-1} t}, & \text{if } r > 0 \text{ and } T = \infty. \end{cases}$$

Theorem 4.1 Assume a , δ , ε and b to satisfy the conditions stated in Lemma 4.1. Let

$$c_{\bar{V}} := \left(\frac{\varepsilon - \Delta}{b + \varepsilon - 1} / A^{(0)}(0) \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad c_{\bar{p}} := \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \left(\frac{b+\varepsilon-1}{\varepsilon-\Delta} \right)^{\frac{1}{\gamma}} A^{(0)}(0)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{b-1+\Delta}{b+\varepsilon-1}}, \quad \text{and}$$

$$c_{\bar{w}} := \left(\frac{\Delta}{\varepsilon} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \right)^{\left(\frac{1}{1-\Delta} \right)^{\frac{1}{a}}} \left(\frac{\varepsilon-\Delta}{b+\varepsilon-1} \frac{1}{A^{(0)}(0)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma a}}. \quad \text{Then}$$

$$\begin{aligned} \bar{V}(t) &= c_{\bar{V}} \cdot e^{R(t)} A^{(0)}(t) \cdot y_0^{\frac{b+\varepsilon-1}{\varepsilon-\Delta}} & \stackrel{r=0}{=} c_{\bar{V}} A(t) y_0^{\frac{b+\varepsilon-1}{\varepsilon-\Delta}}, \\ \bar{p}(t) &= c_{\bar{p}} \cdot e^{R(t)} A^{(0)}(t)^{\frac{b}{b+\varepsilon-1}} \cdot y_0^{\frac{b-1+\Delta}{\varepsilon-\Delta}} & \stackrel{r=0}{=} c_{\bar{p}} A(t)^{\frac{b}{b+\varepsilon-1}} y_0^{\frac{b-1+\Delta}{\varepsilon-\Delta}}, \\ \bar{w}(t)^a &= c_{\bar{w}} \cdot \mu(t)^{\frac{1}{1-\Delta}} e^{-\frac{\gamma-1}{\gamma} R(t)} \cdot y_0^{\frac{b+\varepsilon-1}{\varepsilon-\Delta}} & \stackrel{r=0}{=} c_{\bar{w}} \mu(t)^{\frac{1}{1-\Delta}} y_0^{\frac{b+\varepsilon-1}{\varepsilon-\Delta}}. \end{aligned}$$

4.2 Illustration of the case when μ is constant

We illustrate the dependence of the characteristics of the model, i.e., the optimal state trajectory y , the rate $\bar{\lambda}_T$ and the optimal control paths, on the *size* and the *sign* of the parameter b . In this subsection, in order not to clutter the issue, we assume that the factor μ is a positive constant, see Subsection 4.4 for the general case. Time independence of the arrival intensity has far reaching consequences, see the discussion below and Subsection 4.3. For the illustration, the values of b are chosen to vary within the set $\{-0.8, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 2, 10\}$; the other model parameters are: $\mu = 1$, $r = 0$,

$T = 10$, $y_0 = 1$, $a = 2$, $\delta = 1$, and $\varepsilon = 2$, i.e. we consider a finite horizon time homogeneous model without discounting. At the end of this section we shall briefly comment on the case $r > 0$ and T finite or infinite. Some of the b values are carefully chosen, e.g. $b = \pm \frac{a-\delta}{a} = \pm 0.5$ and $b = 0$, to illustrate special properties of the system, see below. A power function is a good behavior model when either “innovation” or “external” factors are the driving forces of the adoption process. The case $b = 1$ is one of the two extreme forms of the Bass model, see Introduction and Section 5 (choose $\Omega = 1$ and $\Gamma = 0$). The other extreme case of the Bass model is Mansfield’s model, i.e. $\Omega = 0$ and $\Gamma = 1$. All properties of the characteristics y , $\bar{\lambda}$, \bar{p} , \bar{w} and \bar{V} which will be illustrated by the graphs can be easily verified using the formulas stated in Theorem 4.1., see also the next subsection.

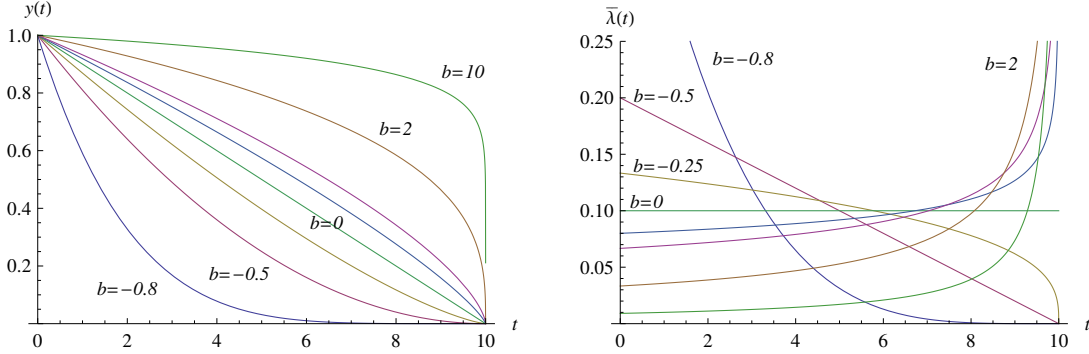


Figure 1: Optimal trajectories $y(t)$ of the market-share-to-be-captured, and the corresponding rates of sales $\bar{\lambda}(t)$ for different parameter values b ; $T < \infty$ and $r \equiv 0$.

Window 1 of Figure 1 shows that, if $b = 0$, the market-share-to-be-captured, $y(t)$, decreases linearly in time; this choice of b corresponds to the situation when the dynamic does not explicitly depend on the state y , and neither “innovation” behavior nor “word-of-mouth” communication are playing any role for the diffusion of the product. The affine structure of $y(t)$ in t , if $b = 0$, is reflected by the fact that in $\bar{\lambda}_T$ is constant, viz. this case $\bar{\lambda}_T(t) \equiv 0.1$, see Window 2. For negative powers b , the functions $y(t)$ are always convex, while they are concave if b is positive. If $b = -0.5$, this is one of the special values of the parameter set, then $\bar{\lambda}_T$ depends linearly on t . Optimal rates of sales are monotone increasing and convex in time whenever the exponent b is positive; negative exponents force the rates to be monotone decreasing functions. But the rates can be convex or concave, depending on whether or not $b > -\frac{a-\delta}{a} = -0.5$.

For the case of a constant function μ , Figure 2 shows the remarkable dependence of the optimal control paths on b . If $b = 0$, then $\bar{p}(t) \equiv \text{const.}$ For negative b values, i.e., latecomers to the market are most eager to buy, prices are convex and increasing functions over time. If the ψ function has a positive exponent, the typical innovation model, then prices are concave and monotone decreasing; they drop rapidly at the end of a finite planning horizon, see Window 2.1. The dependence of the advertising rate on b is most special, see Window 2.2: When μ is constant, then the optimal rates $\bar{w}(t)$ are independent of time! The easy explanation of this fact is offered by Theorem 4.1; see also

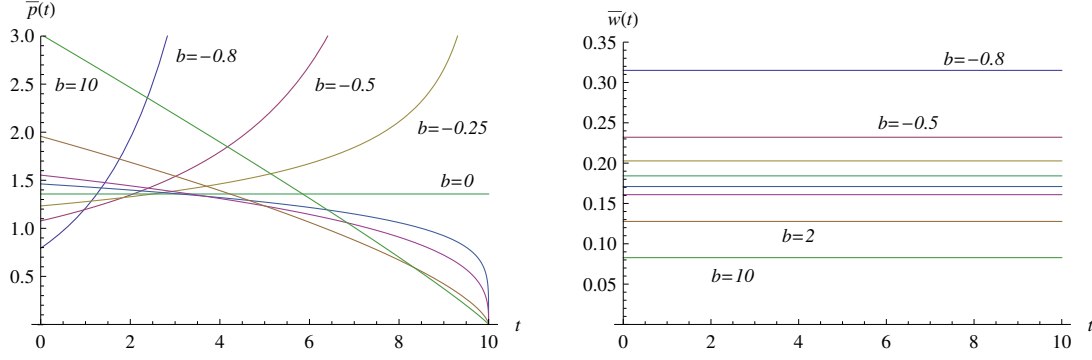


Figure 2: Optimal price trajectories $\bar{p}(t)$ and optimal advertising rates $\bar{w}(t)$ parametrized by b ; $T < \infty$ and $r \equiv 0$.

MR I. A consequence of this fact, when combined with Proposition 2.1, is that the graphs of the reciprocal of \bar{p} and $\bar{\lambda}$, see Figures 1 and 2, are actually proportional.

In a similar manner we can exploit Theorem 4.1 to analyze the cases of time homogeneous models with a constant discount rate and a finite planning horizon or an infinite one. We briefly describe two results of our analysis which highlight the differences between a case without discounting and a discounted case. A crucial difference between these two cases is that the optimal advertising rate \bar{w} is no longer a constant but a decreasing function, if r is positive. More precisely, for any b , the function \bar{w} is exponentially decreasing with rate $\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{r}{a}$. Furthermore, optimal price paths are exponential functions too; their rate equals

$$r \left(1 - \frac{b}{b + \varepsilon - 1} \cdot \frac{\varepsilon - \Delta}{1 - \Delta} \right),$$

and the rate can be positive or negative. Whenever $b = 1 - \Delta$, this rate is zero, and the optimal price trajectory is constant. A special case of such a parameter constellation is $a = 2$, $\delta = 1$, $b = 1/2$ and $T = \infty$, the model analyzed in [19]. Theorem 4.1 together with the identity $b = 1 - \Delta$ offer an explanation of this exceptional phenomena, see also Subsection 5.1. Another remarkable case is specified by $b = 0$, i. e. there is no adoption effect present. In this special case optimal prices will be increasing but the discounted optimal prices are constant, i. e. the price of the durable good must rise at the interest rate.

4.3 Comparative statics

The explicit expressions of the characteristics of a general optimally controlled system described by (2.1), see Theorem 3.3, enable us to perform a detailed sensitivity analysis of all characteristics with respect to the various model parameters. In order not to overburden the presentation we shall restrict our sensitivity analysis to the case of power functions $\psi(y) = y^b$ and time independent functions μ . To further simplify the presentation we shall assume $y_0 = 1$, and $r(t) \equiv 0$. Comparative statics for more general systems will be

published elsewhere. Whenever $y_0 \equiv 1$, $r(t) \equiv 0$ and $\mu(t) \equiv \mu > 0$ the formulas given in Theorem 4.1 simplify. Let

$$C := (\varepsilon - \Delta) \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \Delta^\Delta \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{1}{b + \varepsilon - 1} \right)^{\varepsilon - 1} \right)^{\frac{1}{\varepsilon - \Delta}}. \quad (4.1)$$

Then, recall $\gamma = \frac{\varepsilon - \Delta}{1 - \Delta}$,

$$y(t) = \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{\frac{\varepsilon - 1}{b + \varepsilon - 1}}, \quad (4.2)$$

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{\varepsilon - 1}{b + \varepsilon - 1} \frac{1}{T} \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{\frac{-b}{b + \varepsilon - 1}}, \quad (4.3)$$

$$\bar{p}(t) = C \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \frac{b + \varepsilon - 1}{\varepsilon - \Delta} \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{\frac{b}{b + \varepsilon - 1}} \cdot T^{1/\gamma}, \quad (4.4)$$

$$\bar{w}(t)^a = C \frac{\Delta}{\varepsilon - \Delta} T^{-\frac{\gamma - 1}{\gamma}}, \quad (4.5)$$

$$\bar{V}(t) = C \left(1 - \frac{t}{T} \right) \cdot T^{1/\gamma}. \quad (4.6)$$

Note, since μ does not depend on time we already know that $\bar{w}(t)$ is a constant. To prove qualitative and quantitative results on the dependence of the characteristics on a , b , δ , ε and T we simply take derivatives of the functions (4.2) – (4.6), or the log of these functions, with respect to the parameters and analyze the sign of the derivative functions. For example, since \bar{V} involves μ as a power expression, the elasticity of the revenue expression along the optimal path with respect to μ is constant and equals $1/(\varepsilon - \Delta)$. Hence, $\partial \bar{V} / \partial \mu$ is positive and the expected revenue increases if the arrival intensity becomes larger, a property which is intuitively clear. In addition, the formulae reveal that the μ -elasticities of \bar{p} and \bar{w}^a are not only positive but equal $1/(\varepsilon - \Delta)$ too. This fact can also be easily derived using the Dorfman-Steiner identity when combined with the property that the optimal (fractional) rate of sales $\bar{\lambda}(t; \mu)$ is independent of μ . Table 1 summarizes the results of our sensitivity analysis.

The entries $+$, $-$ and 0 indicate that a characteristic (a row in Table 1) is either a monotone increasing function ($+$), is a monotone decreasing function ($-$) or is independent (0) of the parameter (a column of Table 1); the entry “ \pm ” indicates that no general statement is possible and that the behavior of the quantity of interest depends on the relative magnitude of two or more of the parameters. Besides the information provided in Table 1 various formulas of elasticities can be derived or relationships between different elasticities can be proved. To give just one example, it can be easily seen that

$$El_{\Delta} \bar{p}(t; \Delta) = El_{\Delta} \bar{V}(t; \Delta) + \frac{\Delta}{\varepsilon - \Delta};$$

thus, the difference of both elasticities is independent of t , $0 \leq t < T$, and of T too.

	b	Δ	ε	μ	t	T
y	+	0	\pm	0	—	+
$\bar{\lambda}$	\pm	0	\pm	0	+, if $b > 0$ —, if $b < 0$	—, if $b > 0$ \pm
\bar{p}	\pm	\pm	\pm	+	—, if $b > 0$ +, if $b < 0$	+, if $b > 0$ —, if $b < 0$
\bar{w}	—	\pm	\pm	+	0	—
\bar{V}	—	\pm	\pm	+	—	+

Table 1: A summary of the sensitivity analysis of the time homogeneous case without discounting.

4.4 Illustration of the case when μ depends on time

To show the impact that time dependence of the arrival intensity has on the characteristics of a system which is driven by a power function $\psi(y) = y^b$, we shall consider three μ -scenarios which are depicted in Figure 3. To have nice and meaningful analytical expressions of such functions we use the construction proposed by Bemmaor in [4], see Introduction. Thus, scenario *II* is a mixture of densities characterized by two parameters, 0.45 and 10, see [4], page 206 for details. Scenarios *I* and *III* are but shifted versions of this basic μ function. The first one is generated by shifting μ five (time) units to the left, while the third one is obtained by a shift of the same magnitude to the right. The three scenarios capture typical marketing situations. The first case illustrates falling customer interest. The third case describes just the opposite phenomena, viz. growing product awareness. The second one, in between the two extremes, portrays the “normal” situation of a steady, increasing interest in buying the product at the beginning of its life-cycle, followed by fading interest towards the end. In this subsection we concentrate on the finite horizon problem. Infinite horizon problems with time dependent μ functions will be discussed in Section 5.

Window 2 of Figure 3 illustrates the management recommendation MR I, see Section 3, when ψ is a power function. According to Theorem 4.1, see also Theorem 3.3, the optimal advertising rate is isochronous with μ . The shifts in height of the various plots are due to the different $c_{\bar{w}}$ values for different b values, see Theorem 4.1. Note, $c_{\bar{w}}$ is monotone decreasing in b if the initial value y_0 equals one. While the optimal price evolution does not explicitly depend on the fluctuations of μ , prices are nevertheless influenced by the time dependence of the arrival intensity of potential buyers via their implicit dependence on $y(t)$; this is due to the presence of the term $\psi(y(t))$ in the optimal pricing formula, see Theorem 3.3. This dependence, however, is convoluted since the composition of the two functions ψ and y depends in a non trivial manner on both b and μ . Separate plots of $\psi(1 - y)$ and $y(t)$ and their compositions for different b values would give an impression of this convoluted dependence.

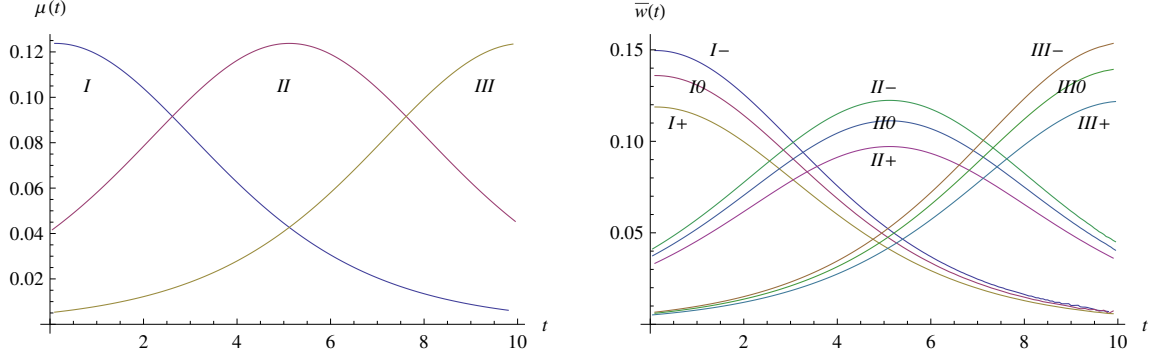


Figure 3: Three μ -scenarios, labelled I , II and III (the graphs on the left). The corresponding optimal advertising rates for three different power functions (all together nine plots) are shown on the right; the label $I-$, for instance, refers to scenario I and the negative power value $b = -0.25$, see below; label $II0$ indicates the combination of scenario II and $b = 0$. The parameters are: $y_0 = 1$, $a = 2$, $\delta = 1$, $\varepsilon = 2$, $T = 10$, $r = 0$, and b is an element of the set $\{-0.25, 0, 0.25\}$.

Window 1 of Figure 4 shows the time evolution of the nine different plots of the market-share-to-capture. The graphs $II-$, $II0$ and $II+$ have the typical S-shape form one expects to see, recall $y = 1 - x$. During the introductory phase of the adoption process of a product it takes time for the market share to take off before it starts converging during the final phase of the life cycle. The different y evolutions clearly reflect the three μ scenarios and display the spectrum of possible market share developments. The exact formula of each function y is given by Proposition 4.1. The individual collection of y -functions are monotone increasing in b . The graphs of y are complemented by the graphs of $\bar{\lambda}$, see the window on the right of Figure 4.

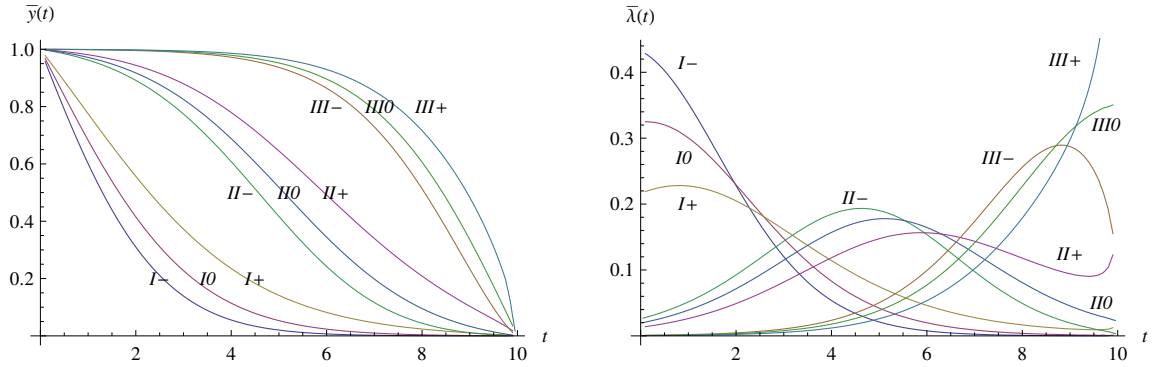


Figure 4: The evolution of the market-share-to-capture and the corresponding rates of sale of all nine cases; the parameters are the same as before.

These plots give an impression of the many possibilities how the market share and the rate of sales can evolve, especially when the horizon is finite and the factor μ is still large close to the expiration date. Rates of sales can be decreasing all the time, see possibility

$I-$, depending on the time dependence of the factor μ (scenario I) and the properties of the system function ($b = -0.25$); or rates can peak early, like in the case of $I+$. The scenarios $II+$ and $III-$ show the complexity of the evolution of rates of sales due to the interplay of a finite horizon and system parameters. The two scenarios nicely illustrate the impact the system function has. The positive exponent for scenario $II+$ is responsible for the up-tick of the rates at the end, while the downturn of $\bar{\lambda}_{III-}$ is due to the negative b exponent. To summarize, simple and general statements about how rates of sales will develop under all possible circumstances are – at best – misguided and, most often, flat wrong. It usually requires detailed numerical studies to predict the exact time evolution of the rates of sales and the corresponding market share when models have complex arrival intensities and behavioral structures.

5 Controlled Flexible Bass Models

In this section we shall exploit the results of Section 3 and analyze the controlled Bass model, i.e. the case $\psi(y) = \Omega y + \Gamma y(1 - y)$, $\Omega, \Gamma \geq 0$, in greater detail. Note, ψ is not a simple power function and the results of Section 4 do not apply, except for the very special case when $\Gamma = 0$. In Subsection 5.1, we start by studying the special case $\Omega = \Gamma = 1$, and we check how well the results based on the approximation of $\psi(y)$ by $y^{1/2}$, proposed in [19], fit the exact characteristics y_E , $\bar{\lambda}_E$, \bar{p}_E , \bar{w}_E and \bar{V}_E ; the subscript E indicates the exact values. We compute the true values of the characteristics using Theorem 3.3.

5.1 The system functions $\psi(y) = \sqrt{y}$ and $\psi(y) = y + y(1 - y)$: A comparison

To begin with, we take a look at the very special situation when the price elasticity parameter $\varepsilon = 2$. While the two functions \sqrt{y} and $y + y(1 - y)$ are not really close when one looks at both functions on the whole unit interval $[0, 1]$, see Figure 5, the values of the diffusion potential of both functions at $y_0 = 1$, i.e. the integral $\int_0^1 \psi(y)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} dy$, cf. Lemma 3.1, are the same for this very special case. Hence, the optimal advertising rates and the continuation values $\bar{V}(t)$ are identical as well; for this special choice of ε , this is actually the case no matter what the values a , δ and the function μ are. There are slight differences between the pricing policies and the optimal trajectories, see Table 2, row 3.

If $\varepsilon \neq 2$, for instance, $\varepsilon = 1.5$, $a = 2$, $\delta = 1$, $\mu \equiv 1$, $y_0 = 1$ and T is finite or infinite, there are, of course, (small) differences between the optimal advertising rates, which are constant since μ is assumed to be a constant, and also between the continuation values \bar{V} of both systems. These differences are small since the values of the two diffusion potentials at 1 are almost the same since the deviation of $\varepsilon = 1.5$ from $\varepsilon = 2$ is “small”. The differences between the paths $y(t)$ of both systems, and between the rates $\bar{\lambda}(t)$ of the two systems, are minor if one just looks at the graphs, although the relative percentage errors can be substantial. But the optimal price paths of both systems clearly deviate from each other and evolve quite differently over time, see Figure 5. While $p_S(t)$ is constant, $p_E(t)$

converges to zero after an initial growth period; the subscript S refers to Sethi et al., see [19].

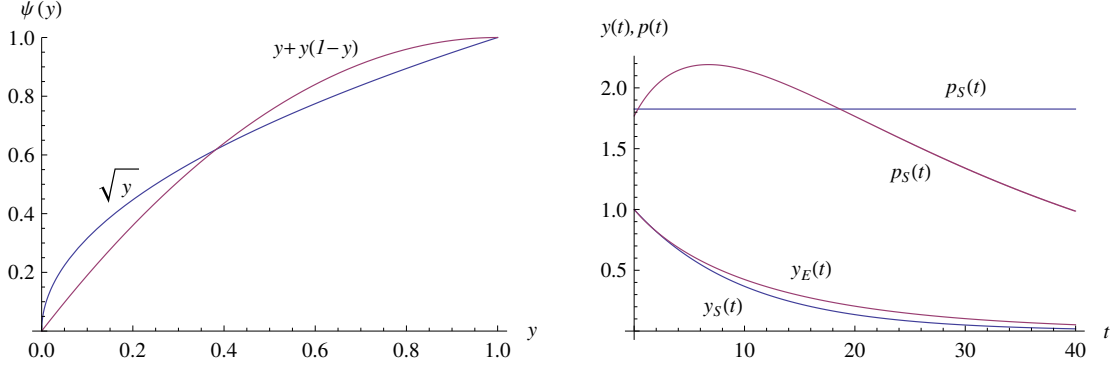


Figure 5: A comparison of the Sethi et al. approximation, i.e. $a = 2$ and $\delta = 1$, and the true model; other parameters are $\mu = 1$ and $\varepsilon = 1.5$, see also Table 2. The plot on the left shows the graph of the functions $\psi(y) = y^{\frac{a-\delta}{a}} = \sqrt{y}$ and $\psi(y) = y + y(1 - y)$ restricted to the unit interval. The window on the right shows the exact optimal price function $\bar{p}_E(t)$ together with the optimal pricing policy $\bar{p}_S(t)$ proposed by Sethi et al. The second set of graphs on the right depicts the optimal state evolutions $y_E(t)$ and $y_S(t)$, see [19].

ε	$y(t)$	$\bar{\lambda}(t)$	$\bar{p}(t)$	$\bar{w}(\cdot)$	$\bar{V}(\cdot)$
1.1	25.76	18.09	18.57	3.92	7.74
1.5	23.87	12.15	13.17	1.60	3.18
2	20.06	9.83	10.78	0	0
3	14.74	7.17	7.97	0.74	1.48
5	9.49	4.60	5.14	0.75	1.50
10	4.99	2.42	2.70	0.47	0.95

Table 2: Relative average percentage errors (see this subsection for an explanation), as a function of ε , of the exact characteristics \bar{w} , \bar{p} , etc. and the characteristics of the approximating system proposed in [19]; $a = 2$, $\Delta = 1$, $\mu \equiv 1$, $T = \infty$ and $r \equiv 0.1$.

Table 2 provides a few representative error numbers which support the general observations. The relative errors are the quotients of the L_1 -norm of the differences of the two functions to be compared and the L_1 -norm of the exact curve, where all (discretized) integrals are evaluated over the time range which comprises 95 % of the total market share (based on the exact values). Note, if ε increases then the relative errors get smaller. If ε tends to one then the errors can be substantial. However, based on extensive numerical studies over a wide range of parameter values we claim that the approximation of $y + y(1 - y)$ by the power function y^b , $b = 0.5$, is – overall – acceptable, especially, if only values of \bar{V} and \bar{w} are important. Although, over a wide range of parameter values, the two models yield very similar results this fact does not necessarily imply that the optimal controls \bar{p}_s and \bar{w}_s are good controls if the system function equals ψ_E .

5.2 The controlled Bass model

In this subsection we consider the time independent and time dependent controlled Bass model when Ω and Γ are positive parameters. For positive parameters the Bass model is a combination of the extreme cases $\psi(y) = y$, analyzed in Section 4, and Mansfield's model $\psi(y) = y(1 - y)$. Mansfield's system function stylizes the situation when not only is the word-of-mouth communication channel the dominating one, but the innovation channel is completely shut down. Note, the other extreme assumes that the adoption of the new product can be solely attributed to innovation (external factors), and that there is no word-of-mouth influence present.

The time independent controlled Mansfield model can be easily analyzed using Theorem 3.3. Due to the symmetry of the function $y(1 - y)$ on the unit interval the results can be easily predicted: If T is finite, $r = 0$ and μ is constant, then the optimal price path will look very much like the upper part of an elongated ellipse, perfectly symmetric with respect to the midpoint of the planning horizon, see Figure 6 and $\Omega = 0$, while the optimal rates of sales will have a bathtub shape. Rates rapidly fall from $+\infty$ until they reach a plateau level, stay there for most of the time, before shooting up towards the end, being a mirror image of the rates prior to half-time of the life cycle of the product. If μ is constant then optimal advertising rates are constant too. The characteristics of a finite horizon model with discounting will show a similar behavior as the characteristics of the cases without discounting, except that symmetry of all functions should no longer be expected. For most of the time, optimal prices will be lower and will be skewed towards $t = 0$; they will peak earlier. Rates of sales will have the same kind of asymptotic behavior, with and without discounting, but if r is positive then rates reach their minimum value during the second half of the life time cycle. Due to the presence of discounting, optimal advertising rates will be monotone decreasing on $[0, T]$.

For the general Bass model our study will focus on the dependence of optimal prices on the quotient Ω/Γ , and a few other aspects. For instance, we shall derive a formula of the time \hat{t} when an (optimal) price trajectory might peak. In this subsection, like in Subsection 4.2, we shall assume that μ is a constant. The case of time dependent arrival intensities will be exemplified in the second part of this section in the context of infinite horizon problems with discounting.

To present the results of the brief study in a consistent manner, we set the parameter Γ of the imitation component of the system function equal to 1, and allow the parameter of innovation, Ω , to increase from zero, the Mansfield model, to ten. Thus, we analyze the situation when the internal communication channel, being the only channel to begin with, will eventually be dominated by the external one.

Figure 6 illustrates the fact that for the finite horizon controlled Bass model without discounting, or for the infinite horizon model with discounting, market penetration pricing policies or skimming policies can be optimal, depending on the relative strength of the two communication channels. If $T < \infty$ and $r = 0$, see Window 1 of Figure 6, a market penetration pricing strategy is optimal as long as Ω is "small", more precisely as long as $\Omega/\Gamma < 1$, see Lemma below. Window 2 of Figure 6 illustrates the fact that for infinite

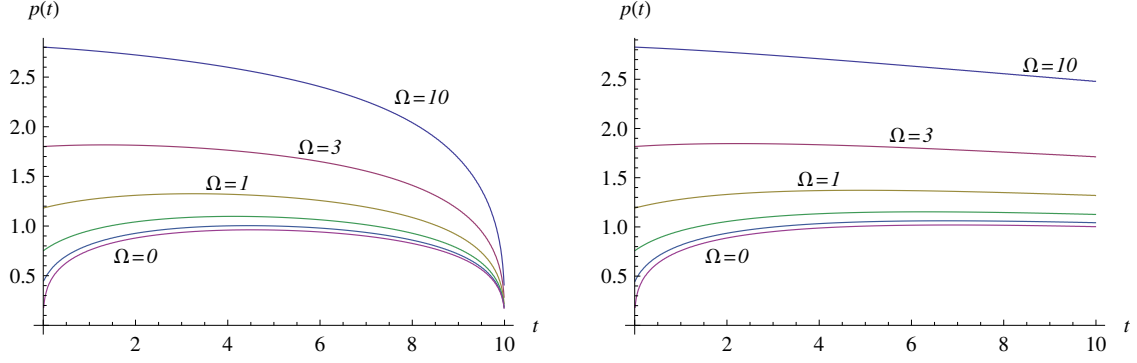


Figure 6: Optimal price trajectories of controlled Bass models for different ratios Ω/Γ , where $\Gamma = 1$. The graphs on the left illustrate the price evolution if the planning horizon is finite ($T = 10$) and profits are *not* discounted; the graphs on the right show the optimal price paths when $T = \infty$ and profits are discounted, $r = 0.1$; in both cases, $y_0 = 1$, $a = 1$, $\delta = 0.2$, $\varepsilon = 3$ and $\mu \equiv 1$.

horizon Bass models – in principle – the evolution of optimal prices is similar, except the decline is – naturally – much more gradual. With discounting, however, the critical value of the quotient Ω/Γ depends on r and needs to be determined numerically in each case.

These observations, based on a visual inspection of the graphs of Figure 6 can be made precise. If $\varepsilon = 2$ and $r = 0$ there is an explicit solution of \hat{t} . For general ε values one needs to rely on numerical computations.

Proposition 5.1 *For the controlled Bass model, assume $\Gamma = 1$, $y_0 = 1$, $0 \leq \delta < a$, $\varepsilon > 1$ and $\Omega \geq 0$. Let $w := 1 + \Omega$.*

(a) *Let T be finite, $r \equiv 0$ and μ be a positive constant. If $\Omega < 1$, then the optimal price trajectory will peak at $\hat{t} := \hat{t}(\Omega, 1)$ in the open interval $(0, T)$. The uniquely determined point \hat{t} is defined by (5.2), see below. As a function of Ω , the mapping \hat{t} is monotone decreasing. If $\Omega \geq 1$, i. e. the innovation parameter is greater or equal than the imitation coefficient, then optimal price paths are monotone decreasing; price skimming is optimal.*

(b) *Let $\varepsilon = 2$ and $\Omega \leq 1$. Then, $\omega := 1 + \Omega \leq 2$,*

$$\hat{t}(\Omega, 1) = T \left(1 - \frac{\omega^3}{6 \left(\omega - \frac{2}{3} \right)} \right).$$

Proof. It follows from Theorem 3.3 that

$$\ln(\bar{p}(t)) = \text{const} + rt + \frac{1}{\varepsilon - 1} \ln(\psi(y(t))).$$

(a) Since r is assumed to be zero, the price path \bar{p} will peak if

$$0 = \frac{1}{\varepsilon - 1} \frac{\psi'(y(t))}{\psi(y(t))} \dot{y}(t); \quad (5.1)$$

this happens whenever $\psi'(y(t)) = 0$. Note, the rate of sales of an optimally controlled time homogeneous Bass model is positive in the interior of the time interval $[0, T]$. For the Bass function ψ the derivative expression is zero if $y(t) = \hat{y} := w/2$. Moreover, since \dot{y} is negative and $\psi'(y) = \omega - 2y$, an optimal price path is strictly monotone increasing before it reaches \hat{y} , and it is strictly monotone decreasing afterwards. Thus, the price paths are unimodal and the maximizer, if it exists in $(0, T)$, is unique. Note, the location \hat{y} , as a function of Ω , is a monotone increasing function and, for $0 \leq \Omega < 1$, the point \hat{y} lies in the interval $(1/2, 1)$, i.e. optimal prices of a Bass model will reach their highest values before 50 % of the market has been captured. Employing (3.10), cf. also Remark 3.3, we see that \hat{t} such that $y(\hat{t}) = \hat{y}$ is characterized by the equation

$$\begin{aligned} B(\hat{y}) &= B(y(\hat{t})) \stackrel{!}{=} B(y_0) \frac{A^{(0)}(\hat{t})}{A^{(0)}(0)} \\ \iff \int_0^{\hat{y}} \psi(z)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} dz &\stackrel{!}{=} \left(1 - \frac{\hat{t}}{T}\right) \int_0^{y_0} \psi(z)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} dz. \end{aligned}$$

Let $H(y; \Omega)$ denote the quotient of the two ψ -integrals whenever $\Omega \geq 0$, the numerator being the B function evaluated at y and the denominator being $B(1)$. Since $\psi(y) = \Omega y + y(1 - y) = \omega y - y^2$ the change of variable, $y/\omega =: z$, yields $H(y) = B(y/\omega; 0)/B(1/\omega; 0)$. Moreover, $\hat{y}(\Omega) = \omega/2$ and $A^{(0)}(\hat{t})/A^{(0)}(0) = 1 - \hat{t}/T$. Hence,

$$H(\hat{y}) = \frac{B(\frac{1}{2}; 0)}{B(\frac{1}{\omega}; 0)} = 1 - \frac{\hat{t}}{T}. \quad (5.2)$$

Since $B(\frac{1}{\omega}; 0)$ is a decreasing function in Ω , the assertion follows.

(b) The explicit formula of \hat{t} follows by elementary calculations. ◆

Finally, we would like to illustrate the impact of time dependent arrival intensity factors in the context of controlled Bass models. To this end, we take two of the scenarios introduced in Subsection 4.4, viz I and II, and combine these two μ -functions with the Bass functional ψ . As before, we concentrate on the relative size of Ω and Γ . Since the advertising rates \bar{w} are synchronized with μ the evolution of \bar{w} can be easily predicted. For scenario I all optimal advertising rates are monotone decreasing in t , and the rates are isotone in Ω . For the second scenario, the time dependence of \bar{w} corresponds to the one of μ_{II} , and the rates are again higher when Ω gets larger. As far as the evolution of the market shares is concerned, they stay fairly close over the range of Ω values while the sales rates can be quite different during the initial phase of the adoption period. For small Ω values the optimal rates $\bar{\lambda}$ are monotone decreasing. If $\Omega \gg \Gamma$ then the rates will have a concave-convex shape reaching a maximum value fairly quickly. Figure 7 shows the optimal price paths for both scenarios I and II and six different Ω values, viz. $\Omega \in \{0, 1/10, 1/3, 1, 3, 10\}$. Both windows of Figure 7 – when compared with Figure 6 – clearly demonstrate (i) the influence of discounting and (ii) the interplay between the time dependent μ factors and the system function ψ . While the overall effects of “innovation” and “imitation” are preserved the impact of the time factor, especially if Ω is large, is highlighted in the window on the right.

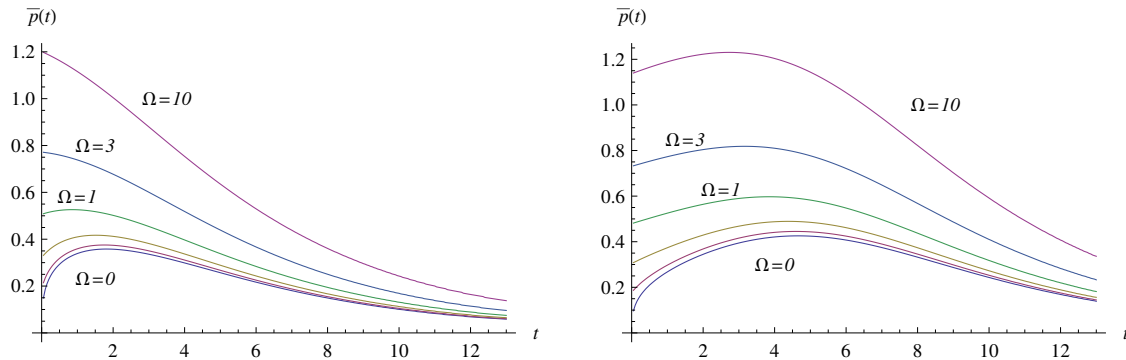


Figure 7: Optimal price trajectories of *time-dependent* infinite horizon controlled Bass models for different ratios Ω/Γ , when $\Gamma = 1$, and $\Omega \in \{0, 1/10, 1/3, 1, 3, 10\}$. The graphs on the left show the optimal price trajectories of scenario I, cf. Subsection 4.4; on the right, you see the price paths for scenario II.

6 Conclusions

In contrast to previous studies we analyze *time* and *general state dependent* controlled adoption models characterized by isoelastic price and advertising dynamics. In addition, we allow for non-negative time dependent discount rates and consider the control problem over a finite horizon and an infinite horizon. Except for advertising costs no other cost expressions are taken into account.

We use the general theoretical results to analyze, in particular, time dependent controlled Bass models and models when the system function ψ is a power function of y . The theory provides the analytical underpinning of specific management recommendations. The computational method which we propose makes it possible to numerically study isoelastic models with arbitrary time and state factors. Specifically, should sales and/or optimal prices of a model with complex characteristics peak at some points in time then the corresponding numbers can be easily computed.

An important implication of the various formulas and results is the fact that the properties of the system function ψ , for instance $\psi(y)$ is monotone increasing, determine the time evolution of optimal prices. The prices are transformed values of the adoption process. Since the time factor μ only affects optimal prices in terms of an integral expression, μ influences the price level but not the evolution of optimal prices.

The optimal advertising rate, however, is subordinated to the function μ and only depends on ψ via the diffusion potential. These insights, combined with proper choices of the arrival intensity μ , facilitate the process of fitting models to data.

Finally, our analysis sheds new light on questions raised in [2] and [7], e.g. “why does the Bass model fit without decision variables”, and “why does the Bass model lead to odd optimal advertising policies?” The generalized Bass Model (GBM) and flexible Bass models introduced in [2] are special cases of (2.1) and (2.2). The definition of GBM

determines the rate of sales λ to be the product of $\psi(y(t))$ and a non-negative function $\mathfrak{z}(t)$, coined the “current marketing effort” by Bass et al. The factor $\mathfrak{z}(t)$ is supposed to capture the direct impact of all marketing variables at time t and, combined with the factor $\psi(y(t))$, determines the evolution of the system. In [2] and [7] a “mapping function” that transforms the marketing variables “price”, denoted by $Pr(t)$, and advertising, $Adv(t)$, to current marketing effort of the form

$$\mathfrak{z}(t) = 1 + \beta_1 \overline{\ln(Pr(t))} + \beta_2 \overline{\ln(Adv(t))} \quad (6.1)$$

has been proposed. Given $\mu(t)$ and the constants Ω, Γ , Theorem 3.3 reveals that the optimal marketing effort is uniquely determined and is given by

$$\mu(t)\bar{w}(t)^\delta \bar{p}(t)^{-\varepsilon} = c_3 \cdot \mu(t)^{\frac{a}{a-\delta}} \cdot \psi(y(t))^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \quad (6.2)$$

where c_3 depends on a, δ, ε , the diffusion potential $B(1)$ and the time-to-go potential $A^{(0)}(0)$. While (6.2) there are many ways to set up (6.1), even if structural properties of $Pr(t)$ and $Adv(t)$, e. g. $Pr(t)$ is a constant or $Pr(t)$ is exponentially decreasing, are imposed, expression (6.2) is unique. Using (6.2) we can (numerically) compute the evolution of the market share. The case $\varepsilon = 2$ is again a particularly inspiring example since $y(t)$ is implicitly determined in terms of elementary functions. Let $\varepsilon = 2$, $a = 2$, $\delta = 1$, ψ the *Bass functional* and, for instance, $\mu(t) = \sqrt{\varphi(t; m, \sigma^2)}$, where $\varphi(t; m, \sigma^2)$ denotes the Gaussian density with mean m and variance σ^2 . Then (6.2) implies, recall $\varepsilon = 2$ and $y(0) = 1$,

$$\dot{y}(t) = -c_3 \mu(t) (\psi(y(t)))^{-1} \iff \dot{y}((\Omega + \Gamma)y(t) - \Gamma y^2(t)) = -c_3 \cdot \varphi(t; m, \sigma^2).$$

Let $\Phi(t)$, $t \geq 0$, denote the integral of φ on $[0, t]$, i. e., up to an additive constant, Φ is the cumulative normal distribution function associated with (m, σ^2) , then

$$\left(\frac{\Omega + \Gamma}{2}\right) y^2(t) - \frac{\Gamma}{3} y^3(t) = \frac{3\Omega + \Gamma}{6} - c_3 \cdot \Phi(t),$$

and a plot of $y(t)$ shows the typical behavior of the evolution of the market share $x(t) = 1 - y(t)$.

References

- [1] Bass, F. M. (1980). The Relationship Between Diffusion Rates, Experience Curves, and Demand Elasticities for Consumer Durable Technological Innovations. *The Journal of Business* **53** (3) Part 2: Interfaces Between Marketing and Economics, 51–67.
- [2] Bass, F. M., Krishnan, T. V. and Jain, D. C. (1994). Why the Bass Model Fits Without Decision Variables. *Marketing Science* **13** (3), 203–223.
- [3] Bass, F. M., Jain, D. C. and Krishnan, T. V. (2000). Modeling the Marketing-Mix Influences in New-Product Diffusion. In V. Mahajan, E. Muller & J. Wind (Eds.), *New-product diffusion models* (pp. 99–122). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

- [4] Bemmaor, A. (1994). Modeling the Diffusion of New Durable Goods: Word-of-Mouth Effect Versus Consumer Heterogeneity. *Research Traditions in Marketing*, ed. G. Laurent, G. L. Lilien, and B. Pras, pp. 201–229. Boston: Kluwer.
- [5] Chandrasekaran, D. and Tellis, G. J. (2007). A Critical Review of Marketing Research on Diffusion of New Products. In: N. K. Malhotra, *Review of Marketing Research* **3**, Armonk: M. E. Sharpe, 39–80.
- [6] Fleming, W. H. and Soner, H. M. (2006). *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York.
- [7] Fruchter, G. E. and Van den Bulte, Christophe (2011). Why the Generalized Bass Model leads to odd optimal advertising policies. *Intern. J. of Research in Marketing* **28**, 218–230.
- [8] Golder, P. N. and Tellis, G. J. (1998). Beyond Diffusion: An Affordability Model of the Growth of New Consumer Durables. *Journal of Forecasting* **17** (3/4), 259–280.
- [9] Helmes, K. and Schlosser, R. (2013). Dynamic Advertising and Pricing with Constant Demand Elasticities, *Journal of Economic Dynamics and Control* **37**, 2814–2832.
- [10] Horsky, D. (1980). Comments on “The Relationship Between Diffusion Rates, Experience Curves, and Demand Elasticities for Consumer Durable Technological Innovations”. *The Journal of Business* **53** (3) Part 2: Interfaces Between Marketing and Economics, 75–78.
- [11] Jamieson, L. F. and Bass, F. M. (1989). Adjusting Stated Intention Measures to Predict Trial Purchase of New Products: A Comparison of Models and Methods. *Journal of Marketing Research* **26** (3), 336–345.
- [12] Krishnan, T. V. and Jain, D. C. (2006). Optimal Dynamic Advertising Policy for New Products. *Management Science* **52**, 1957–1969.
- [13] McAfee, R. P. and te Velde, V. (2008). Dynamic Pricing with Constant Demand Elasticity. *Production and Operations Management* **17** (4), 432–438.
- [14] Mahajan, V., Muller, E. and Bass, F. M. (1990). New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Directions for Research. *Journal of Marketing* **54**, 1–26.
- [15] Mansfield, E. (1961). Technical Change and the Rate of Imitation. *Econometrica* **29**, 741–766.
- [16] Robinson, B. and Lakhani, C. (1975). Dynamic Pricing Models for New Product Planning. *Management Science* **10**, 1113–1122.
- [17] Russell, T. (1980). Comments on “The Relationship Between Diffusion Rates, Experience Curves, and Demand Elasticities for Consumer Durable Technological Innovations”. *The Journal of Business* **53** (3) Part 2: Interfaces Between Marketing and Economics, 69–73.

- [18] Sethi, S. P., Bass, F. M. (2003). Optimal Pricing in a Hazard Rate Model of Demand. *Opt. Control Appl. Methods* **24**, 183–196.
- [19] Sethi, S. P., Prasad, A. and He, X. (2008). Optimal Advertising and Pricing in a New-Product Adoption Model. *Journal of Optimization Theory and Applications* **139** (2), 351–360.

III Oligopoly Advertising and Pricing in Isoelastic Adoption Models

K. Helmes and R. Schlosser

Abstract

This paper analyzes deterministic dynamic advertising and pricing differential games in particular durable-good oligopoly markets. We analyze infinite horizon models with constant price and advertising elasticities of demand in the cases of symmetric or asymmetric firms. Specifically, we consider general saturation/adoption effects. For two classes of models we derive solution formulas of the optimal policies and of the value functions, and show how to compute the evolution of sales of each firm. For the classes of deterministic models to be considered, the analytical results reveal that the Nash-equilibrium of the dynamic game is based on the separation of firm specific and common solution components. The common factor is governed by the untapped market size and the adoption effect. The firm's specific coefficient reflects its individual market power and depends on the price elasticities, unit costs, arrival rates and discount factors of all competing companies.

Keywords: dynamic pricing and advertising over an infinite horizon, oligopoly, competition, constant elasticities of demand, deterministic differential games

1 Introduction

In survey articles, Mahajan, Muller and co-authors, [16], [17], [18] and [20], have emphasized the importance of normative results for product growth models of durable-goods and nondurable ones in oligopolistic markets. Since the '70s a number of models of advertising competition have been proposed, and optimal advertising policies have been derived, see, for example, the series of papers by Erickson spanning almost thirty years, e.g. [5], [6] and references therein, the many papers by Fruchter, see [7] and [8] to cite but a few, and the various contributions by Sethi and co-authors, e.g. [21], [22] and [14]. The recent review article by Huang et al. [12], and the books by Dockner et al. [4] and Jørgensen and Zaccour [13] provide rich bibliographies and excellent accounts of many of the accomplishments in this research area. The paper by Teng and Thompson [23] is an early paper which analyzes the case of dynamic advertising combined with dynamic pricing in a competitive environment. Papers by Krishnamoorthy et al. [14], by Sethi et al. [22] and by Erickson [5] are more recent articles where optimal marketing-mix strategies in dynamic competitive markets are derived; for further references see [12] and the bibliographies of the articles referred to above. The article by Krishnamoorthy et al. is most important for the present manuscript.

In [14], Krishnamoorthy et al. analyze a deterministic dynamic duopoly game. They study a cumulative sales model with a particular dynamic. The authors show how both

firms should (dynamically) adjust their advertising spending and how they should (dynamically) set their prices. The specific model is an extension of the monopoly problem analyzed by Sethi et al. [22]. The infinite horizon duopoly game takes into account the evolution of cumulative sales of two brands/firms of a product category. The profit rate of each firm is assumed to be the discounted difference of a firm's price and its own (constant) marginal cost of production multiplied by its instantaneous sales; the profit rate is reduced by a quadratic expression proportional to the instantaneous advertising spending. Krishnamoorthy et al. assume the interaction of price and advertising is multiplicative. They analyze the case when the demand depends linearly on p and the case with constant price elasticity. In both cases, the advertising controls are multiplicative factors of the rate of sales, and the sales rates of both firms are affected by a common state factor. This factor is assumed to be a square root term of the number of consumers who have not yet purchased a unit of the product category. If marginal costs are positive, Krishnamoorthy et al. determine the feedback Nash equilibrium strategies of the duopoly game and they derive analytical expressions of the optimal advertising and pricing strategies.

In this paper, we will extend the duopoly game to a [more general] differential game with any finite number of firms and derive explicit results for two special classes of competitive models. The basic setting of the first class of extended dynamic games is simple. It is related to the monopoly model proposed in [22] which was generalized by Helmes et al. [11]. Each firm is selling its brand of a particular [category] durable-good and is facing a [constant] brand specific elasticity of demand. The rate of sales of each firm is postulated to be multiplicative in [its] price, in [its] advertising expenditure – a power expression – and involves two additional terms: a [constant] firm specific arrival intensity factor and a general expression which depends on the total sales of all brands. This last factor, which is the same for all firms, reflects the way the companies compete in the market. The system function captures general adoption and saturation effects and allows modeling [direct] network externalities.

The profit expression to be maximized by each firm is [slightly] more general than the one considered in [14]. Investing w per unit of time in advertising activities is assumed to cost $k \cdot w^a$, a and k fixed constants. The exponent a , like the advertising elasticity of demand δ , $0 \leq \delta < a$, is assumed to be the same across all firms; the parameter k can be different for each brand. While this class of oligopoly model is closely related to the monopoly model analyzed in [11], see also [10], the models differ as far as the following aspects are concerned. In the competitive case, we only consider infinite horizon problems. Moreover, we have to restrict ourselves to time-independent arrival intensities in order to be able to prove the existence of a unique Nash equilibrium. On the other hand and in contrast to [11], each firm is assigned a [constant] *nonnegative* marginal cost. It will turn out that the number of firms with zero marginal costs and their characteristics determine whether or not a Nash-equilibrium of the differential game exists. The equilibrium result is a corollary to a tailor-made fixed-point theorem. We prove the existence and uniqueness of a fixed-point of a particular mapping determined by the differential game assuming a fundamental condition to hold. Inspired by the expression “tragedy of the commons” we call this assumption “the condition of the commons”. This assumption is satisfied in any monopoly market; in an oligopoly market the condition is satisfied should all companies

have positive marginal costs. In the simple case of symmetric firms with zero marginal cost(s) the condition is equivalent to a bound on the number of competing firms. This bound depends on the price elasticity of demand, and on the parameters a and δ .

We are able to derive explicit solutions for two classes of differential games. Models of Class I, s. a., are characterized by *general* adoption functions, cf. [11] for the case of a monopolist, but a *special* market structure. The market environment is supposed to be such that all firms face an identical price elasticity of demand, i. e. $\varepsilon_i = \varepsilon > 1$, $1 \leq i \leq n$, and have zero marginal costs, $c_i = 0$. Typical applications of such situations include, for instance, end-of-year sales of retail fashion goods or the situation of car-dealers at the end of a model year. More generally, situations when n competing firms are selling a fixed number of similar assets and costs are sunk can be cast as a Case I model.

The second class of models includes the problem analyzed by Krishnamoorthy et al. as a special case. We allow for different (fixed) marginal costs and firm specific parameters u_i , ε_i , k_i and r_i . In contrast to Case I models, system functions are restricted to be of the form $\psi(y) = y^{1-\delta/a}$, $0 \leq \delta < a$.

The exponent $1 - \delta/a$ of the system function ψ plays an important role. For instance, if $\delta = 0$ then $\psi(y) = y$ and a Case II becomes a pure pricing problem with no advertising expenses (but positive arrival rates), and the dynamic of the game is related to a controlled oligopolistic Bass model with only “innovative” customers. The “word-of-mouth” term of the (general) Bass functional $\psi(y) = \Omega y + \Gamma y(1 - y)$ is zero, $\Gamma = 0$, $\Omega = 1$, cf. [11]. The size of the power has far reaching consequences on prices, profits of companies, growth of sales etc. This is due to the fact that the customer arrival rates u_i of firms are either multiplied by y , if, for example, $\delta = 0$, or are multiplied by \sqrt{y} should $\delta = 1$ and $a = 2$. While the pure pricing model assumes customers to arrive due to intrinsic motives the general advertising-and-pricing model postulates the necessity of an extrinsic stimulus which might be costly. Paying for commercials to attract customers or to boost arrival rates is the prototypical example of such (explicit) advertising expenses. Paying higher rent to be able to set up shop at a prime location is an example of (indirect) advertising costs. We shall illustrate the dependence of profits, prices, etc. on arrival rates, price elasticities, marginal costs and the number of competing firms by looking at numerical examples. These (simple) numerical studies complement our general theoretical results which comprise explicit formulas of value functions and optimal marketing-mix policies as well as sensitivity results.

While the models to be analyzed in this paper are motivated by marketing applications, for example, the evolution of the market share of the premium car segment of each of the three main competitors in Germany, the models are also related to dynamic oligopoly games studied in the context of extracting and pricing natural resources, e. g. petroleum, copper, etc., see [1], [9], [15] and the references therein. The size of the untapped market of a category of a specific good corresponds to the known reserves of the commodity. The brands/firms within a product category should be equated with, for example, different crude-oil producing countries/regions or types of petroleum characterized by their specifications, e. g. West Texas Intermediate and Brent Blend (low sulphur crudes), or Oman Crude (high sulphur content).

This paper is organized as follows. A detailed formulation of the dynamic game and the description of the class of admissible policies will be given in Section 2. General optimality conditions are stated in Subsection 2.1. Two fundamental (theoretical) results are stated in the form of two lemmas in Subsection 2.2. The characterization of the optimal policies (in feedback and in open-loop form) of Case I models, i.e. general system function but all unit costs are zero and the price elasticities of firms are identical, can be found in Section 3. There, we also provide a summary of our sensitivity analysis of Case I models.

Section 4 presents the results on Case II models which include the results of [14] as a special case. Case II models are characterized by special system functions – particular power functions – but the models allow firms to have different unit costs (of production). Moreover, firms are allowed to differ in all other respects, e.g. financing costs, customer arrival rates and price elasticities. Besides the main characterization theorems, Theorem 4.1 and Theorem 4.2, a numerical study illustrates the impact the number of competing firms has on prices. The study also illustrates how the values of different key parameters of each firm, e.g. different arrival rates, price elasticities, etc. determine the market shares, etc. of the competing firms.

A collection of formulas and abbreviations to which we shall regularly refer is given in Appendix A. Technical proofs, especially the proof of Lemma 2.1, are relegated to Appendix B. Some additional tables related to the numerical study described in Section 4 are displayed in Appendix C. Section 5 contains a brief summary of the main achievements of our research and concludes.

2 The Deterministic Oligopoly Model

In this section we precisely describe the adoption models with (constant) isoelastic demand functions which will be analyzed in the sequel. Let $p > 0$ denote price, $w \geq 0$ money spent on advertising and let $y \in \mathbb{R}$, $0 \leq y \leq N$, be the number of customers who have not yet adopted the product. The constant $N \in \mathbb{R}^+$ is assumed to be known. It specifies the number of potential customers in the market. Thus, $x =: N - y$ represents cumulative sales of all brands of a particular product category. Throughout, we assume the rate of sales λ_i of each firm i , $1 \leq i \leq n$, to be of the form, $0 < y$,

$$\lambda_i(p, w, y) = u_i w^\delta p^{-\varepsilon_i} \psi(y), \quad \delta \geq 0, \varepsilon_i > 1, \quad (2.1)$$

and zero if $y = 0$. The arrival intensity vector $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ has positive components while the vector $\vec{\varepsilon}$ of price elasticities of the different firms has components ε_i which are bigger than 1. The non negative advertising elasticity $\delta \geq 0$ is assumed to be the same for all firms.

The nonnegative real valued function ψ captures adoption and saturation effects. Typical examples of ψ are power functions y^b , b positive or negative, the Bass function $\psi(y) = \Omega y + \Gamma y(1 - y)$, $\Omega, \Gamma = 0$, and variants thereof. We allow for general functions ψ ; they

only have to satisfy minor technical conditions, s. Lemma 2.2. Advertising cost functions g_i are assumed to be of the form $g_i(w) := k_i w^a$, where $k_i > 0$, and a is a fixed (common) parameter larger than δ . The firm specific parameters k_i can be interpreted as effectiveness factors of individual advertising campaigns, or tax multipliers (surcharges or discounts).

Let $x_j(t)$ be the (accumulated) sales of company j by time t , and let $x(t) := \sum_{j=1}^n x_j(t)$. If $x(0) = 0$, then $y(0) = N$. The value $y = N$ indicates that no product has yet been sold.

We postulate that each firm decides on its price and advertising rate exploiting the common knowledge $\vec{x}(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))$ and the values of all parameters of the model. We allow each firm to have its own discount parameter $r_j > 0$ and marginal cost $c_j \geq 0$. The objective of each firm j is to choose admissible policies $p_j^*(\cdot)$ and $w_j^*(\cdot)$, and associated rates λ_j^* , cf. (2.1), such that its pay-off

$$J_j^* = \int_0^\infty e^{-r_j t} ((p_j^* - c_j)\lambda_j^*(t) - g_j(w_j^*)) dt$$

is as large as possible subject to the dynamics $\dot{x}_j(t) = \lambda_j^*(t)$ and the policies $(p_j^*, w_j^*)_{1 \leq j \leq n}$ are a closed-loop Markovian Nash equilibrium of the adoption game. For the detailed definition of the set of feasible controls see Section 4.1 of [4]. Moreover, Section 4.2 of [4] describes a set of sufficient conditions for an equilibrium to exist. These conditions, see Theorem 4.1 in [4], will be verified for the problems under consideration.

For any possible state $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq x_j$ and $x = \sum_{j=1}^n x_j \leq N$, let $W_j(\vec{x})$ denote the largest profit of player j when the infinite horizon game starts in \vec{x} . To identify a solution of the differential game, see [4] pp. 92, we are looking for function of $(p_j^*(\vec{x}), w_j^*(\vec{x}))$, $1 \leq j \leq n$, and bounded function $W_j(\vec{x})$ such that the system of partial differential equations

$$\begin{aligned} r_i W_i(\vec{x}) = & \sup_{p_i > 0, w_i \geq 0} \left\{ \lambda_i \left(p_i, w_i, N - \sum_{j=1}^n x_j \right) \left(p_i - c_i + \frac{\partial W_i}{\partial x_i}(\vec{x}) \right) - g_i(w_i) \right. \\ & \left. + \sum_{j \neq i} \lambda_j \left(p_j^*(\vec{x}), w_j^*(\vec{x}), N - \sum_{\ell=1}^n x_\ell \right) \frac{\partial W_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

has a solution. The structure of the rates λ_j and the identity $y = N - \sum_{j=1}^n x_j$, $0 \leq y \leq N$, suggest that solutions $W_i(\vec{x})$ are of the form

$$W_i(\vec{x}) = V_i(y), \quad (2.3)$$

where the functions $V_i(y)$ satisfy the system of ordinary differential equations

$$\begin{aligned} r_i V_i(y) = & \sup_{p_i > 0, w_i \geq 0} \left\{ \lambda_i(p_i, w_i, y) (p_i - c_i - V_i'(y)) - g_i(w_i) \right. \\ & \left. - \sum_{j \neq i} \lambda_j(p_j^*(y), w_j^*(y), y) V_i'(y) \right\} \end{aligned}$$

subject to given functions $(p_j^*(y), w_j^*(y))$, $1 \leq j \leq n$, where $V_i'(y) := \frac{dV_i}{dy}(y)$. Note, if (2.3) holds then $\frac{\partial W_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = -V_i'(y)$ for all $1 \leq j \leq n$. In the sequel we shall verify that under appropriate conditions the system has a unique solution $(V_j(y))_{1 \leq j \leq n}$, and so does (2.2).

2.1 Optimality conditions

The Bellman-equation (2.2) yields optimality conditions for the optimal (feedback) pricing and advertising decisions $p_i^*(y)$ and $w_i^*(y)$ of each firm i . Taking partial derivatives with respect to p_i and w_i of the function showing up on the i -th right-hand side of (2.2), simple algebra yields a formula of $p_i^*(y)$ in terms of ε_i , c_i and $V_i'(y)$, see (A.1); the formula of w_i^* in feedback form is given by (A.2). The formula of w_i^* involves ψ , p_i^* and the parameters ε_i , a , δ , k_i and u_i . We assume $V_i' > 0$ for all $i = 1, \dots, n$. From now on we use the abbreviating notation $\lambda_i^*(y) := \lambda_i(p_i^*(y), w_i^*(y), y)$, $0 < y \leq N$, where $p_i^*(y)$ and $w_i^*(y)$ are optimal feedback policies. The optimality conditions imply a dynamic Dorfman-Steiner identity for each firm.

Proposition 2.1 *For the oligopoly problem described in Section 2.1 a Dorfman-Steiner identity holds for each firm, $1 \leq i \leq n$:*

$$\frac{w_i^*(y)^a}{p_i^*(y)\lambda_i^*(y)} \equiv \frac{\delta}{k_i a \varepsilon_i}, \quad y \in (0, N], \quad (2.4)$$

i. e. optimal advertising expenditure and revenue are pointwise proportional.

Proof. See Appendix B.

Since the Dorfman-Steiner identity holds for every $y \in (0, N)$ we can evaluate (2.4) along the optimal trajectory $y(s)$, $0 \leq s < \infty$. This way, for any $t \geq 0$, we obtain identities which relate total revenue (from t onwards) $\bar{U}_i(t)$,

$$\bar{U}_i(t) := \int_t^\infty e^{-r_i(s-t)} p_i^*(y(s)) dx_i(s),$$

the combined production/purchasing cost $\bar{C}_i(t)$ and the accumulated advertising expenditure $\bar{W}_i(t)$:

$$\bar{W}_i(t) := k_i \int_t^\infty e^{-r_i(s-t)} w_i^*(y(s))^a ds \quad \text{and} \quad \bar{C}_i(t) := c_i \int_t^\infty e^{-r_i(s-t)} \lambda_i^*(y(s)) ds.$$

Recall, $V_i(y(t)) =: \bar{V}_i(t) = \bar{U}_i(t) - \bar{C}_i(t) - \bar{W}_i(t)$. This equation for $\bar{V}_i(t)$ combined with (2.4) implies the following useful formulas.

Proposition 2.2 *Let $y(t)$ denote the optimal path of the category potential. For any i , $1 \leq i \leq n$, and $t \geq 0$,*

$$(i) \quad \bar{W}_i(t)/\bar{U}_i(t) = \delta/(a \cdot \varepsilon_i),$$

$$(ii) \quad \bar{W}_i(t) = \frac{\delta}{a\varepsilon_i - \delta} \left(\bar{V}_i(t) - \bar{C}_i(t) \right), \quad \text{and} \quad \bar{U}_i(t) = \frac{a\varepsilon_i}{a\varepsilon_i - \delta} \left(\bar{V}_i(t) - \bar{C}_i(t) \right).$$

In the sequel, in order to shorten some expressions we shall use the following abbreviations throughout the paper. For each firm i , $1 \leq i \leq n$, let $\gamma_i := \frac{a\varepsilon_i - \delta}{a - \delta}$, see also (A.4), and let $\eta_i = \eta_i(k_i, a, \delta, \varepsilon_i, u_i)$ be the constants defined by (A.5). Except for sensitivity studies, the explicit formula of η_i will not be important. However, it is useful to remember that η_i is increasing in the intensity parameter u_i as well as the factor k_i .

2.2 Fundamental results

Using the expressions of the optimal $w^*(y)$ and $p^*(y)$ in terms of derivatives of the value functions $V_i(y)$, see (A.1) and (A.2), the Bellman equation (2.2) turns into a system of 1st order nonlinear differential equations. This system together with [natural] boundary conditions determine the value functions V_i . The system can be written as, $0 < y \leq N$,

$$r_i V_i(y) = \left(\eta_i (c_i + V_i'(y))^{-(\gamma_i - 1)} - \sum_{j \neq i} (\gamma_j - 1) \eta_j (c_j + V_j'(y))^{-\gamma_j} \cdot V_i'(y) \right) \psi(y)^{\frac{a}{a - \delta}}, \quad (2.5)$$

where $V_i(0) = 0$ for each i . To solve (2.5), we look for solutions V_i which are separable functions of i and y :

$$V_i(y) := \alpha_i \beta(y).$$

The constants α_i are assumed to be positive numbers, and β is a positive increasing differentiable function of the variable y , the untapped market size. The common factor $\beta(y)$ reflects the value of a market of size y . The numbers α_i quantify the market power of each firm i . The separable “Ansatz” implies that the constants α_i and the function β have to satisfy the system of equations (A.6).

To identify both factors we will first prove two lemmas. The first one, Lemma 2.1, characterizes the solution of a special non linear system of algebraic equations, see (2.6) below. The solution values are the numbers α_i . Lemma 2.2 characterizes the inventory effect $\beta(y)$. The proofs of both results will be given in Appendix B.

Lemma 2.1 (i) For positive variables α_i , $1 \leq i \leq n$, let $z_i := (\gamma_i - 1) \eta_i (c_i + \alpha_i)^{-\gamma_i}$ and $Z := \sum_{i=1}^n z_i$. The system of equations in the unknowns α_i , $1 \leq i \leq n$,

$$r_i = \eta_i (c_i + \alpha_i)^{-\gamma_i} \frac{c_i + \alpha_i}{\alpha_i} - \sum_{j \neq i} z_j, \quad (2.6)$$

which is equivalent to $\left(\frac{1}{\gamma_i-1} \cdot \frac{c_i+\alpha_i}{\alpha_i} + 1\right) z_i - r_i = Z$ has a unique positive solution $\vec{\alpha}^* = (\alpha_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ if and only if

$$1 > \sum_{i=1: c_i=0}^n \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i}. \quad (2.7)$$

(ii) In the symmetric case (with n firms), i. e. $r_i \equiv r$, $k_i \equiv k$, $u_i \equiv u$, $\eta_i \equiv \eta$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha_i^* \equiv \alpha_n^{sym}$ is the same constant; the number α_n^{sym} decreases in n , r , k and increases in u , η .

(iii) Let $c_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, and assume $n - 1 < \sum_{j=1}^n \gamma_j^{-1}$. There are explicit expressions of the unique solution values α_i^* of (2.6), see (A.7).

In the general case, $c_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, the unique positive solution $\vec{\alpha}$ of (2.6) can be computed as described by Steps 1–3, see (2.8). To this end, define n real valued functions f_i , $1 \leq i \leq n$, on the positive line: $f_i(\xi) := \left(\frac{c_i}{\xi + \gamma_i}\right) \eta_i (c_i + \xi)^{-\gamma_i} - r_i$, $\xi > 0$. Moreover, without loss of generality let $r_1 := \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i\}$. For any positive value ξ and $1 \leq j \leq n$, let $\alpha_j > 0$ denote the unique positive solution of the equation $f_j(\alpha_j) = f_1(\xi)$, see Appendix B, and call the function $\hat{\alpha}_j(\xi) := \alpha_j$ the j -th reaction function. Then,

Step 1. Determine the reaction functions $\hat{\alpha}_j(\xi)$ for $j = 1, \dots, n$, $\xi > 0$.

Step 2. Solve the equation

$$f_1(\alpha_1) = \sum_{j=1}^n (\gamma_j - 1) \eta_j (c_j + \hat{\alpha}_j(\alpha_1))^{-\gamma_j} \quad (2.8)$$

in the positive unknown α_1 . Let $\alpha_1^* > 0$ denote the unique solution of (2.8).

Step 3. For $j = 2, \dots, n$, evaluate $\alpha_j^* := \hat{\alpha}_j(\alpha_1^*)$.

The vector $\vec{\alpha}^* := (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$ is the unique positive solution of (2.6). An explanation of the construction and the details of the proofs are given in Appendix B.

The next lemma is about the market size value β . The lemma characterizes β as the solution of a particular Bernoulli differential equation. It is a slight extension of Lemma 3.1 in [11].

Lemma 2.2 *Let $\psi(y)^{1/(\varepsilon-1)}$ be integrable on $[0, N]$. The solution of the Bernoulli differential equation*

$$\beta'(y) = \beta(y)^{\frac{1}{\gamma-1}} \psi(y)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \quad (2.9)$$

with $\beta(0) = 0$, is given by $\beta(y) = B(y)^{(\gamma-1)/\gamma}$, where

$$B(y) := \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_0^y \psi(s)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} ds. \quad (2.10)$$

If $\psi(y)$ is nonnegative then $\beta(y)$ and $B(y)$ are increasing functions of y . Furthermore, if $\psi'(y) \psi^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} B(y) \leq 1 - \delta/a$, then $\beta(y)$ is concave. If $\psi(y) = 1$, i. e. in the case of no externalities, this condition is always satisfied, and $\beta(y) = y^{(\gamma-1)/\gamma}$.

Proof. Appendix B; see (A.8) for equivalent formulations of (2.9).

In the next Section as well as in Section 4 we will be using Lemma 2.1 and Lemma 2.2 to solve special cases of the oligopoly problem described in Section 2.1.

3 A Special Market Structure but a General Adoption Function

In this section we shall consider models with general adoption functions ψ and such that $\psi^{1/(\varepsilon-1)}$ is positive and integrable on $(0, N)$, but assume that (i) all marginal costs are zero, (ii) the price elasticities of all firms are the same, i. e. $\varepsilon_i \equiv \varepsilon > 1$, and (iii) condition (2.7) is satisfied. Dynamic games with evolution equations (2.1) which satisfy these properties will be called Case I models.

For Case I models, system (A.6) separates into an algebraic system – exploit (A.7) and (A.9), a special case of (2.5) – and the Bernoulli differential equation, see (A.8). The solution of the algebraic system (2.6) is given by

$$\alpha_i^* = \left(\frac{1}{\eta_i \gamma} \left(r_i + \frac{\sum_{j=1}^n r_j}{\gamma/(\gamma-1) - n} \right) \right)^{\frac{-1}{\gamma}}. \quad (3.1)$$

Obviously, the values α_i^* are independent of ψ . In the symmetric case, i. e. all firms have the same characteristics, $u_i \equiv u$, $k_i \equiv k$ and $r_i \equiv r$, then all α_i^* are equal to the value α_n^{sym} , where

$$\alpha_n^{sym} = \left(\frac{\eta}{r} (\gamma - n(\gamma - 1)) \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

The value α_n^{sym} is positive iff $n < 1 + 1/(\gamma - 1)$, cf. (2.7). This inequality imposes an upper bound on the number of firms such that an equilibrium point exists. Expressed differently, if n is given then the inequality $\gamma < n/(n - 1)$ imposes an upper bound on the elasticity ε , viz. $\varepsilon < 1 + (1 - \delta/a)/(n - 1)$. Hence, if the marginal cost of (symmetric) firms is zero, a Markovian Nash equilibrium of the game with n firms exists if and only if consumers are not “too” price sensitive. In the case of a monopoly, i. e. $n = 1$, the condition $n < 1 + 1/(\gamma - 1)$ is always satisfied.

Furthermore, for Case I there is an explicit expression of each value function $V_i(y)$ in terms of a product of the solution $\beta(y)$ of the differential equation (A.8) and α_i . The two factors are defined by (2.9) and (3.1). Using the optimality conditions (A.1) and (A.2) we obtain a formula of the optimal rate of sales $\lambda^*(y)$ of all brands combined. Thus, we are able to compute and to characterize the evolution of the untapped market $y(t)$. Expressions of the individual rates and market shares of each firm are implied by these formulas. The proof of the next result is given in Appendix B, see also Lemma 2.2.

Theorem 3.1 *For Case I models, the optimal rate of sales $\lambda^*(y)$ in feedback form equals*

$$\lambda^*(y) = B(y)\psi(y)^{\frac{-1}{\varepsilon-1}}Z.$$

The optimal y -trajectory satisfies the equation

$$B(y(t)) = B(N)e^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}Zt} \iff y(t) = B^{-1}\left(B(N)e^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}Zt}\right), \quad (3.2)$$

where B^{-1} denotes the inverse function of B . For each firm i , $1 \leq i \leq n$, its optimal rate of sales equals

$$\lambda_i^*(y(t)) = z_i \frac{\beta(y(t))}{\beta'(y(t))}. \quad (3.3)$$

The accumulated sales (up to time t) of each firm are given by

$$x_i(t) = \frac{z_i}{Z} (N - y(t)).$$

Expressions (2.10) and (3.1) together with Theorem 3.1 yield solution formulas of the value function and the optimal policies in feedback form as well as in open-loop form. The next theorem is a collection of such formulas. The straightforward proofs of the different results are based on the optimality conditions (A.1) and (A.2), and the characterization of each value functions V_i as the product of the number α_i^* and the function β .

Theorem 3.2 *For Case I models, let $y(t)$ denote the optimal y -path given by (3.2). The value function (in feedback form) of each firm i , $1 \leq i \leq n$, is given by*

$$V_i(y) = \alpha_i^* \beta(y), \quad y \in [0, N];$$

in the time-domain, it is described by

$$\bar{V}_i(t) := V_i(y(t)) = \alpha_i^* \beta(N) e^{-Zt}.$$

The optimal prices are

$$\begin{aligned} p_i^*(y) &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \alpha_i^* \beta(y)^{\frac{-1}{\gamma-1}} \psi(y)^{\frac{1}{\varepsilon-1}}, \quad y \in (0, N]; \\ \bar{p}_i(t) &:= p_i^*(y(t)) = \beta(N)^{\frac{-1}{\gamma-1}} e^{\frac{1}{\gamma-1}Zt} \psi(y(t))^{\frac{1}{\varepsilon-1}}. \end{aligned}$$

The optimal advertising rates are (see (A.3) for the definition of θ_i)

$$\begin{aligned} w_i^*(y)^a &= \theta_i^a \alpha_i^{*1-\gamma} \beta(y), \quad y \in (0, N]; \\ \bar{w}_i^a(t) &:= w_i^*(y(t))^a = \theta_i^a \alpha_i^{*1-\gamma} \beta(N) e^{-Zt}. \end{aligned}$$

The optimal rates of sales are

$$\bar{\lambda}_i(t) = \lambda_i^*(y(t)) = z_i \beta(N)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} e^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}Zt} \psi(y(t))^{\frac{-1}{\varepsilon-1}}.$$

For Case I models, see Theorem 3.2, a firm's value function $\bar{V}_i(t)$ and its optimal advertising rates $\bar{w}_i(t)$ are exponentially decreasing functions of t . The evolution of the optimal price paths $\bar{p}_i(t)$ is determined by a product of three terms: the first factor is a company's market power α_i^* ; the second factor is an exponentially increasing function of

time, and the third factor is a power expression of the adoption function evaluated along the optimal path $y(t)$. Optimal advertising paths only depend on ψ via the potential B and the initial value $y(0)$. Optimal price paths explicitly depend on ψ and the optimal path $y(t)$. Thus, for Case I models dynamic prices are the major driving forces of the oligopolistic market. For such models, since $\bar{C}_i(t) = 0$, Proposition 2.2 combined with the explicit formulas of the value functions $\bar{V}_i(t)$ yield explicit formulas of the evolution of the firm specific revenues $\bar{U}_i(t)$ and expenditures $\bar{W}_i(t)$.

Next, we shall study the sensitivity of the market power and other important characteristics to changes of a firm's parameter values r_i (its discount value which reflects its financing cost), u_i (the arrival rate) and k_i (the proportionality factor of advertising expenses). Moreover, we analyze how changes of a competitor's parameter values influence the characteristics of a firm. The general results, see Table 1, follow from sensitivity analysis results on z_i and Z . An important feature of Case I models is the fact that z_i and Z are independent of η_i , see (A.5), (B.7) and formula (3.1). Hence, z_i and Z do not depend on u_i and k_i but only depend on r_i . However, the market power values α_i depend on u_i . The starting point of sensitivity studies is Theorem 3.2; Table 1 is a summary of our calculations. For instance, if the rate r_i increases (all else equal), i.e. the financing cost of company i goes up, then its market power will decrease. The firm's optimal marketing strategy is to lower prices $p_i^*(y)$ but to increase advertising spending $w_i^*(y)$. This way the company accelerates the growth of its market share. Higher arrival rates u_i guarantee larger market power α_i^* ; higher rates suggest higher prices and increased advertising spending. Since z_i are independent of η_i , optimal (feedback) rates of sales λ^* and λ_i^* are not affected by changes of u_i or k_i . In Table 1, entries “+”, “−” and “0” indicate that a quantity of a column is monotone increasing (+), is monotone decreasing (−) or is independent of the parameter of a particular row; a question mark indicates that no general statement is possible.

	Z	η_i		α_i^*		λ^*, λ_i^*	
	z_i	θ_i	z_i/Z	p_i^*	w_i	x_i	y
r_i	+	0	+	−	+	+	−
u_i	0	+	0	+	?	0	0
k_i	0	−	0	−	?	0	0
$r_j, j \neq i$	+	0	−	−	+	+	−

Table 1: Case I models: Sensitivity of market power α_i^* and other systems components as functions of model parameters

A byproduct of the analysis which underlies Table 1 are formulas of the elasticity of some quantities of interest. For example,

$$El_{u_i}(w_i^a) = \frac{u_i}{w_i^a} \cdot \frac{\partial w_i^a}{\partial u_i} = \frac{1}{a\varepsilon - \delta}.$$

Thus, in the special case under consideration the elasticity of advertising rates is the same for all firms. The following example illustrates Theorem 3.1 and 3.2. We choose the

Mansfield functional $\psi(y) = y/(1 - y/N)$, $N = 100$, as a particular adoption model. The ψ function captures situations when consumers are either not very well informed about a new product or are somewhat reluctant to buy the product right from the start. In the example, we assume that firms only differ by their arrival rates $u_1 = 20$, $u_2 = 30$, and $u_3 = 40$. Note, condition (2.7) is satisfied and α_i^* , see (3.1), is not affected by ψ .

Example 3.1 Let $\psi(y) = y/N(1 - y/N)$, $N = 100$, $n = 3$, $\varepsilon = 1.2$, $\delta = 1$, $a = 2$, $c = 0$, $k = 1$, $r = 0.1$ and $\vec{u} = (20, 30, 40)$. The adoption function ψ is a special Bass model with innovation factor 0 and imitation factor 1.

Figures 1 and 2 show the evolution of various characteristics of the dynamic game of a Case I model, viz. the sales evolution, market shares, accumulated profits as well as optimal price paths. Figure 1a illustrates the remarkable fact that if the financing cost of all firms is the same, $r_i = r$, the optimal rates of sales of all companies are identical and the number of yet uncommitted customers decreases exponentially with rate Z . The individual gains $\bar{G}_i(t) := \bar{V}_i(0) - e^{-rt}\bar{V}_i(t)$ together with $\bar{V}_i(t)$ are shown in Figure 1b. The optimal price paths and optimal advertising rates are shown in Figure 2.

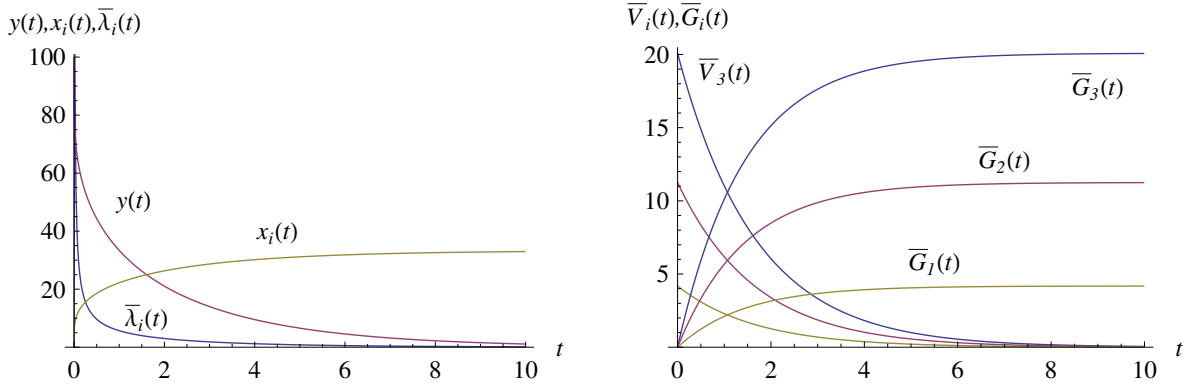


Figure 1: Sales, market fractions (left window) and accumulated profits (right window)

All four graphs of Figure 1 and Figure 2 clearly show the importance of the location of a business, i.e. the impact of the arrival rates u_i . The graphs illustrate the mantra in marketing: location, location, location! A higher arrival rate of a firm implies higher prices, higher revenues and increased market power but also intensified advertising in comparison with the other competing firms.

Example 3.1 also illustrates the effect of the adoption function ψ . The optimal price paths are closely related to the properties of ψ , see Figure 2a. In case of the special function $\psi(y) = y/N(1 - y/N)$ a market penetration pricing strategy is advised to be used. Such a strategy jump-starts sales and generates a “word-of-mouth” momentum. Furthermore, if the market is saturated and the adoption effect is low then optimal prices should go down. For monopoly markets additional examples are discussed in [11].

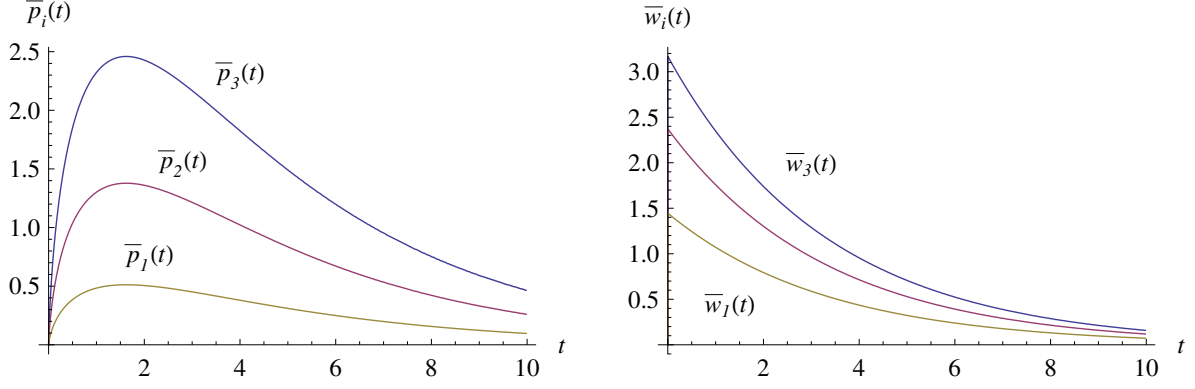


Figure 2: Optimal price paths (left window) and advertising rates (right window)

4 Heterogeneous Unit Costs and Price Elasticities, and a Special Class of Adoption Functions

In this section we consider a second class of n -player differential games. This class is characterized by the property that the ψ -function belongs to the special class of power functions $\psi(y) = y^{(a-\delta)/a}$, $0 \leq \delta < a$; it captures a (new) product adoption with a special saturation effect. The intensity functions λ_i are again given by (2.1), and each firm i , $1 \leq i \leq n$, is characterized by individual parameters $c_i \geq 0$, $\varepsilon_i > 1$ and positive values r_i , u_i , k_i . If condition (2.7) holds we call such class of differential games Case II models. Recall, if all c_i , $1 \leq i \leq n$, are positive then the condition of the commons (2.7) is always satisfied no matter how many companies are competing for customers.

The special parameter choice $n = 2$, $a = 2$, $\delta = 1$ specifies the duopoly model analyzed by Krishnamoorthy et al., see [14]. Case II models also include the pure pricing model with the linear adoption function $\psi(y) = y$ as a very special case. The pure pricing model can be parametrized choosing $\delta = 0$ and a positive a . This choice of parameter values will imply $w^* = 0$ for all firms i , $1 \leq i \leq n$.

For Case II models, to find solutions for (2.5) we try, see also [14], the linear “Ansatz”, $1 \leq i \leq n$,

$$V_i(y) = \alpha_i y. \quad (4.1)$$

Since ψ is a very special power function the coupled system of ODEs (2.5) simplifies and reduces to the identities

$$r_i \alpha_i y = \eta_i (c_i + \alpha_i)^{-(\gamma_i - 1)} y - \sum_{j \neq i} \underbrace{(\gamma_j - 1) \eta_j (c_j + \alpha_j)^{-\gamma_j}}_{z_j} \alpha_i y. \quad (4.2)$$

Since y is a common factor of all three terms of (4.2), Lemma 2.1 can be applied. It guarantees a unique positive solution of (4.2). In the special case of n symmetric firms the algebraic system (4.2) collapses to one equation in one unknown,

$$\frac{c + \alpha_n^{sym}}{\alpha_n^{sym}} - \frac{r}{\eta} (c + \alpha_n^{sym})^\gamma = (n-1)(\gamma-1). \quad (4.3)$$

In the case of a monopolist, i. e. $n = 1$, equation (4.3) becomes

$$\alpha^{mon} r / \eta = (c + \alpha^{mon})^{-(\gamma-1)}.$$

If $c = 0$, we obtain the formula $\alpha^{mon} = (\eta/r)^{1/\gamma}$, and we have an explicit expression of the value function

$$V^{mon}(y) = (\eta/r)^{1/\gamma} y,$$

see Sethi et al. [22] and Helmes et al. [11]. In the general case with heterogeneous firms we are able to numerically compute the solution values α_i of (4.2), cf. Steps 1–3 on p. 8. Moreover, the very special dependence of the value functions $V_i(y)$ on y , see (4.1), combined with the formulas of the optimal feedback controls p_i^* and w_i^* , see (A.1) and (A.2), makes it possible to compute the optimal rates of sales $\lambda_i^*(y)$ and the accumulated rate $\lambda^*(y)$. Hence, the evolution of the accumulated market share can be computed, cf. the following theorem and its proof in Appendix B.

Theorem 4.1 *For Case II models we have, $1 \leq i \leq n$,*

$$\begin{aligned} \lambda^*(y) &= Zy \quad \text{and} \quad y(t) = Ne^{-Zt}; \\ \text{moreover, } \lambda_i^*(y) &= z_i y \quad \text{and} \quad x_i(t) = Nz_i/Z(1 - e^{-Zt}). \end{aligned}$$

For Case II models the sales rates $\lambda_i^(y)$ and $\lambda^*(y)$ are linear functions of the untapped market share y . Using the feedback formulas of the optimal controls and Proposition 2.2 we obtain the evolution of all other quantities of interest for such models.*

Theorem 4.2 *In Case II, if inequality (2.7) holds we have, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq t < \infty$,*

$$\begin{aligned} \text{value functions:} \quad & V_i(y) = \alpha_i^* y, \text{ and } \bar{V}_i(t) = \alpha_i^* Ne^{-Zt}; \\ \text{optimal prices:} \quad & p_i^*(y) = \bar{p}_i(t) \equiv \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i - 1} (c_i + \alpha_i^*), \text{ i. e. optimal prices are constant;} \\ \text{opt. advertising rates:} \quad & w_i^*(y)^a = \theta_i^a (c_i + \alpha_i^*)^{1-\gamma} y, \text{ and } \bar{w}_i^a(t) = \theta_i^a (c_i + \alpha_i^*)^{1-\gamma} Ne^{-Zt}; \\ \text{opt. production costs:} \quad & \bar{C}_i(t) = c_i \frac{Nz_i}{Z+r_i} e^{-Zt}; \\ \text{opt. revenue:} \quad & \bar{U}_i(t) = \frac{a\varepsilon_i}{a\varepsilon_i - \delta} Ne^{-Zt} \left(\alpha_i^* + \frac{c_i z_i}{Z+r_i} \right); \\ \text{opt. expenditures:} \quad & \bar{W}_i(t) = \frac{\delta}{a\varepsilon_i} \bar{U}_i(t). \end{aligned}$$

Proof. All formulas follow from Theorem 3.1 and Proposition 2.2, once the necessary optimality conditions (A.1) and (A.2) are combined with (4.1).

The result on optimal prices is most important. Applied, for example, to the mobile telephone market where the special saturation effect $y^{1-\delta/a}$ is plausible, the results suggest competing firms to offer flat rates. Such flat rates should be set above the usual mark-up $c_i \varepsilon_1 / (\varepsilon_i - 1)$. These additional charges are a consequence of the total market being finite, a positive sales intensity of each firm and the infinite planning horizon.

The following two examples illustrate properties which are typical for Case II models. We display numerical values of various quantities of interest. Example 4.1 reveals how the number of competing firms n effects optimal prices, profits, etc. of symmetric firms.

Example 4.1 Let $\psi(y) = \sqrt{y}$ and $\delta = 1$, $a = 2$. We study how several companies rival for $N = 100$ “batches” of customers. Table 2 and Table 3, see below, illustrate – for Case II models – how variations of the parameters effect optimal prices, profits, etc. of each firm. We choose the following symmetric situation as a benchmark for our analysis: $\varepsilon = 1.8$, $c = 10$, $k = 1$, $r = 0.1$ and $u(n) = 30/n$, n the number of competing firms. Note, since the customer base is fixed the arrival rate of customers of each firm decreases with the number of firms which have entered the market.

The values of a , δ and ε imply γ to be equal to 2.6. The choice $u(n) = 30/n$ assumes the fixed arrival intensity of shoppers, 30, to be equally split among all firms. Hence, if a price p and an advertising rate w are chosen the initial rate of sales facing a monopolist equals $30p^{-2.5}w\sqrt{100}$. Should, for instance, 10 brands compete in the market then this rate drops to a meagre $3p^{-2.5}w\sqrt{100}$ for each brand. In this example we assume that a larger number of firms does not stimulate the buying behaviour of customers.

Before analyzing how the equilibrium varies with the number of brands it is instructive to exploit Theorem 4.2 and formula (4.3) in the case of a monopoly. If $n = 1$ and $\psi(y) = \sqrt{y}$ the monopoly price will be $\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}c$ plus the additional mark-up $\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\alpha^{mon}$, where α^{mon} satisfies the equation $\alpha^{mon} = 10\eta(10 + \alpha^{mon})^{-1.6}$, and $\eta := (25/3)^2 \cdot 2.25^{-1.6} = 18.97$, cf. (A.5). Thus, $\alpha^{mon} = 30.956$, $\varepsilon c / (\varepsilon - 1) = 22.5$ and the monopoly price p^{mon} equals 29.47.

n	V_n^{sym}	$n \cdot V_n^{sym}$	% sales	\bar{U}_n^{sym}	\bar{C}_n^{sym}	\bar{W}_n^{sym}	\bar{p}_n^{sym}
1	309.56	309.56	100.00	808.59	274.42	224.61	29.47
2	90.07	180.14	50.00	286.39	116.77	79.55	24.53
3	42.98	128.94	33.30	145.15	61.85	40.32	23.47
4	25.24	100.96	25.00	87.42	37.90	24.28	23.07
5	16.62	83.12	20.00	58.32	25.50	16.20	22.87
10	4.43	44.32	10.00	15.84	7.01	4.40	22.60
20	1.15	22.96	5.00	4.12	1.83	1.15	22.53
100	0.05	4.73	1.00	0.17	0.08	0.05	22.50

Table 2: Different number of firms n (symmetric case, $u(n) = 30/n$, Example 4.1)

If the number of firms n is increasing then the solution value α_n^{sym} as a function of n will converge to 0, see below, and the optimal price approaches $\varepsilon c / (\varepsilon - 1)$. The first table,

see Table 2, illustrates the dependence of profits V_n^{sym} , revenues \bar{U}_n^{sym} , production costs \bar{C}_n^{sym} , advertising spending \bar{W}_n^{sym} and market prices \bar{p}_n^{sym} (last column of Table 2) on n . The numbers show that these quantities might drop substantially if more firms enter the market and the (fixed) number of consumers is spread equally among all firms.

Table 3 illustrates how the speed of sales, determined by $Z(n)$, see Theorem 4.1, depends on the number of competing firms and the parameter δ , $\delta \in \{0, 0.2, 1\}$. The case $\delta = 0$ corresponds to the pure pricing model. The Example 4.1 shows that in the case of a pure pricing model $Z(n)$ is monotone increasing in the number of competing (symmetric) firms. If $\delta > 0$, $Z(n)$ is either a unimodal (increasing then decreasing) function or a monotone decreasing function. The proof, see Appendix B, of the following general result, see below, reveals that the asymptotic behaviour of $Z(n)$, if $\delta > 0$, is due to the fact that α_n^{sym} is decreasing to zero should n converge to infinity.

Note, the total producers surplus nV_n^{sym} decreases in n . Moreover, the drop is significantly larger if δ is big. It turns out that in case of advertising the competition is harder.

n	$\delta = 0$		$\delta = 0.2$		$\delta = 1$	
	nV_n^{sym}	$Z(n)$	nV_n^{sym}	$Z(n)$	nV_n^{sym}	$Z(n)$
1	845.64	0.03665	641.81	0.03475	309.56	0.03782
2	809.52	0.05991	586.55	0.05049	180.14	0.03047
3	772.73	0.07312	550.45	0.05707	128.94	0.02278
4	748.38	0.08112	527.72	0.06013	100.96	0.01787
5	731.96	0.08638	512.10	0.06166	83.12	0.01461
6	720.34	0.09007	500.58	0.06244	70.69	0.01233
7	711.73	0.09279	491.61	0.06282	61.52	0.01065
8	705.12	0.09488	484.37	0.06296	54.47	0.00937
9	699.90	0.09653	478.33	0.06297	48.87	0.00835
10	695.67	0.09786	473.19	0.06289	44.32	0.00754
20	676.16	0.10404	443.96	0.06096	22.96	0.00380
100	660.11	0.10916	391.37	0.05275	4.73	0.00076

Table 3: Symmetric Case II model, $u(n) = 30/n$: Speed of sales $Z(n)$ and total profits as functions of n ; Example 4.1

Lemma 4.1 *For symmetric Case II models we have:*

- (i) *If $u(n) = u$ (more firms attract more customers) then $\eta(n) = \eta$ and z_n^{sym} is increasing in n . Moreover, $Z(n) = nz_n^{sym}$ increases super-linearly in the number of competing firms.*
- (ii) *If $u(n) = u/n$, $u > 0$ fixed (the customer base is equally shared by all firms), then α_n^{sym} decreases in n , and $Z(n)$ is given by the formula,*

$$Z(n) = n(\gamma - 1)\eta(n)(c + \alpha_n^{sym})^{-\gamma}; \quad (4.4)$$

$\eta(n)n^{a/(a-\delta)}$ is independent of n .

(iii) If $u(n) = u/n$ and $\delta = 0$, then $Z(n)$ is increasing in n . If $u(n) = u/n$ and $\delta > 0$, then $Z(n)$ is decreasing in n or $Z(n)$ is unimodal (increasing then decreasing).

Proof. Use (4.4), the definition of $\eta(n)$, cf. (A.5) and the formula $z_n^{sym} := (\gamma - 1)\eta(n)(c + \alpha_n^{sym})^{-\gamma}$.

Next, we will study the case of asymmetric firms.

Example 4.2 Let $\psi(y) = \sqrt{y}$, $\delta = 1$, $a = 2$, $N = 100$ and $n = 3$. If not chosen otherwise, the parameters $\varepsilon = 1.8$, $c = 10$, $k = 1$, $r = 0.1$ and $u = 10$ are the ones of the reference model.

Tables 4–8, see Appendix C for Tables 6, 7 and 8, illustrate different scenarios of a 3-firm competition characterized by the saturation effect \sqrt{y} . Each table illustrates the dependence of quantities like profit V_i , revenues U , etc. on variations of just one of the five characteristics u_i , ε_i , c_i , r_i and k_i . In all scenarios, Firm 2 represents the reference model while Firm 1 always enjoys a competitive advantage over the other two firms. Firm 3 is always the one with a handicap. For example, see Table 5, the price elasticity of Firm 1 $\varepsilon_1 = 1.7$ is smaller than $\varepsilon_2 = 1.8$ and $\varepsilon_3 = 1.9$. If not chosen differently we consider the parameters given in Example 4.1; $n = 3$ will be norm.

i	u_i	V_i	% sales	U_i	C_i	W_i	\bar{p}_i
1	12	61.52	45.23	202.69	84.86	56.30	23.88
2	10	42.87	32.89	144.81	61.71	40.22	23.46
3	8	27.49	21.88	94.91	41.05	26.36	23.12

Table 4: The importance of location: Different arrival rates u_i ; Example 4.2

Table 4 highlights once more the importance of “location”, i. e. the magnitude of the arrival intensity of potential customers. Firm 2 represents the benchmark case, $u_2 = 10$, while Firm 3 is supposed to have a 20 %-smaller arrival rate, $u_3 = 8$; Firm 1 is assumed to attract 20 % more shoppers than Firm 2, i. e. $u_1 = 12$.

By setting the price “right” Firm 1 is able to reap a huge profit and will gain the largest market share. It turns out that the firm residing at the premium location is able – in our example – to charge a little on top of what Firm 3 is advised to do and can expect its profit to exceed two times the profit of its unfortunate competitor. On the long run the market share of Firm 1 will approach $\sim 45\%$ of the market; but firm 1 will have spent more on advertising than the other two companies combined. The accumulated sales market of each firm grows over time like an exponential distribution function, cf. Theorem 4.1. The total customer base is depleted exponentially at rate $Z = 0.0231$, see Theorem 4.2. Note, the ratio of accumulated sales of any two companies is independent of time, see Theorem 4.1.

i	ε_i	V_i	% sales	U_i	C_i	W_i	\bar{p}_i
1	1.7	79.46	48.24	244.93	93.43	72.04	26.22
2	1.8	42.55	31.65	143.80	61.30	39.94	23.46
3	1.9	23.03	20.11	84.10	38.94	22.13	21.60

Table 5: The impact of a brand image: Different price elasticities ε_i ; Example 4.2

Table 5 shows how the characteristics of the firms depend on their individual price elasticity of demand. We assume that Firm 3 faces the more price sensitive shoppers, $\varepsilon_3 = 1.9$, while Firm 1 enjoys dealing with less sensitive ones, $\varepsilon_1 = 1.7$; the second firm is our benchmark case, i. e. $\varepsilon_2 = 1.8$. The arrival intensities at all three locations are the same, $u_1 = u_2 = u_3 = 10$. The smaller elasticity value 1.7, compared to 1.8 and 1.9 could be due to many reasons, e. g. a stellar image of the brand, good quality reputation, a product with special and attractive features, etc.

In Example 4.2 (elasticities) the firm with the smallest elasticity value will experience the highest profit, see Figure 3, and will charge the highest price, cf. Figure 4a. However, firm 1 will spend more on advertising than the competitors. It is trying to attract many shoppers to be turned into profitable buyers. Firm 3, of the other end of the spectrum, will set a low price. Its profit (23.03) is less than a third of the profit of the top brand.

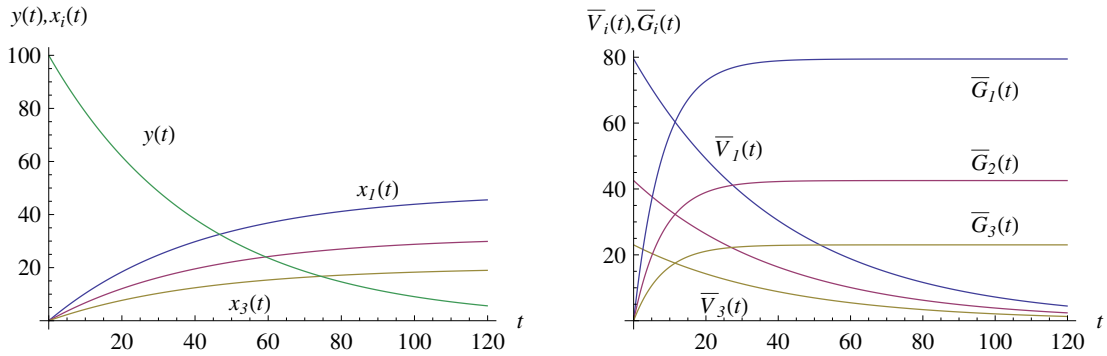


Figure 3: Evolution of untapped market size y and individual market shares x_i (left window); the right window shows the evolution of profits V_i and G_i ; Example 4.2 (elasticities)

Example 4.2 (elasticities) describes a common oligopoly market consisting of a high quality firm, an average quality firm and a discounter. We observe three different price levels and matching decreasing advertising expenditures. As expected, the high quality (or very reputable) firm 1 experiences the highest profit due to the lowest price elasticity.

However, other numerical examples show that the market shares of firms critically depend on the (relative) magnitude of the production costs. For small values of c the firm facing the smallest price elasticity will still set the highest price but Firm 3, the one with the “handicap”, might be gaining the biggest share of the market. Such parameter settings and solutions correspond to oligopoly markets where the top brand only sells a small number of high-quality products whereas a “discounter”, following a low price strategy,

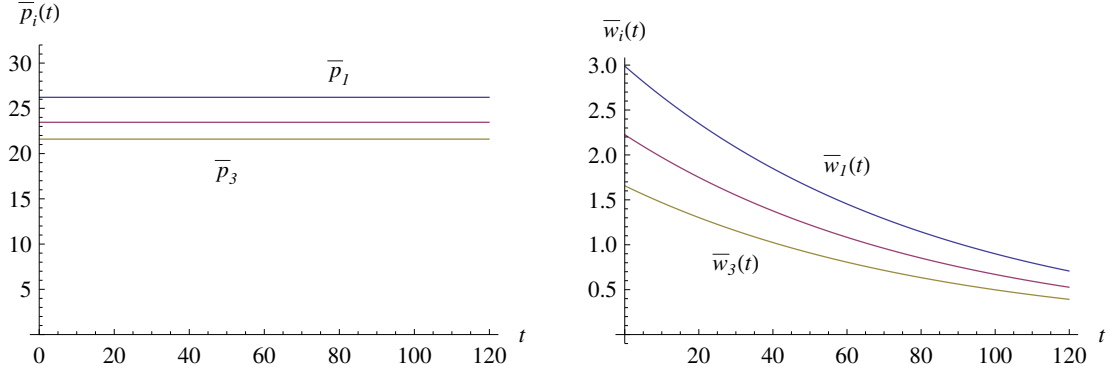


Figure 4: Optimal prices (left) und advertising rates (right) over time; Example 4.2 (elasticities)

captures most of market. The business results of the “average” firm, Firm 2, are usually – as expected – somewhere inbetween the two extremes.

The impact of variations of the unit costs c_i , of the discount rates r_i , and the advertising efficiency coefficients k_i are summarized in Appendix C, see Tables 6, 7 and 8, Example 4.2. The following remark highlights properties enjoyed by a firm whose characteristics u , ε , c , k or r compare favourably with those of its competitors, cf. Tables 4–8.

Remark 4.1 (i) *The firm with a competition advantage gains the highest profits; its α – value is higher than those of the competing firms.*

(ii) *In Example 4.2, see Tables 4, 5, 7 and 8, the firm with a competitive advantage sets the highest price.*

(iii) *In Example 4.2, see Table 7, the firm with the smallest discount rate gains the smallest market share.*

All statements are implied by the pricing formula $\bar{p}_i(t) \equiv \varepsilon_i/(\varepsilon_i - 1)(c_i + \alpha_i^*)$, cf. Theorem 4.2, and the relation $z_i := (\gamma_i - 1)\eta_i(c_i + \alpha_i)^{-\gamma_i}$, cf. Lemma 2.1. The firm with the largest z_i value will catch most of the market.

Case II models arise in many different applied contexts. Due to the non trivial relationship between market power values α_i and market shares z_i/Z different phenomena can be observed, s. a. Many such phenomena can be explained by properly chosen parameter settings. Numerical studies reveal the nontrivial interplay of such (parameter) asymmetries and can be used to calibrate model parameters for the analysis of specific market situations.

5 Conclusions

In this paper we have analyzed two classes of dynamic pricing and advertising game models of competing firms. Both classes of games generalize the duopoly model by Kr-

ishnamoorthy et al. [14] to the case of an oligopoly model comprising n firms and the case of more general adoption effects. As a consequence, more and different competitive scenarios can be analyzed analytically. The open-loop versions of our solution formulas make it possible to directly evaluate scenarios over time. In particular, the evolution of prices and market shares of competing firms can be compared.

We analyze the impact of general adoption effects for a restricted class of games, cf. Case I models. The complex interplay of brand image, financing and production costs as well as technology and location factors can be analyzed for Case II games. In particular, our results reveal how an increasing number of competitors influences the allocation of the market and the speed of gaining market share.

The solution of the model, i. e. a Markovian Nash equilibrium, is derived from a multi-dimensional fixed-point result. If the fixed-point exists, it is shown that it is unique. A necessary and sufficient condition – the condition of the commons – for the existence of an equilibrium is given. The value function of each firm is shown to be separable and it is composed of a common market factor and a firm specific market power coefficient. Each such coefficient depends on the characteristic parameters of all firms. Sensitivity results are obtained and numerical studies have been performed. The results reveal the nontrivial interplay of the various parameters. Such kind of studies can be used to identify and to evaluate competitive advantages or disadvantages of firms in real life applications.

A Collection of Formulas

Optimality conditions:

$$p_i^*(y) = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i - 1}(c_i + V_i'(y)) \iff p_i^*(y) - c_i - V_i'(y) = \frac{1}{\varepsilon_i} p_i^*(y), \quad (\text{A.1})$$

$$w_i^*(y) = \left(\frac{\delta}{\varepsilon_i} \frac{u_i}{k_i a} \psi(y) p_i^{-\varepsilon_i+1} \right)^{1/(a-\delta)} = \theta_i \psi(y)^{1/(a-\delta)} (c_i + V_i'(y))^{\frac{-\varepsilon_i+1}{a-\delta}}, \quad (\text{A.2})$$

where

$$\theta_i := \left(\delta u_i / (k_i \varepsilon_i a) \cdot (\varepsilon_i / (\varepsilon_i - 1))^{-\varepsilon_i+1} \right)^{1/(a-\delta)}. \quad (\text{A.3})$$

Auxilliary parameters:

$$\gamma_i := \frac{a\varepsilon_i - \delta}{a - \delta} \iff 1 - \gamma_i = \frac{-a\varepsilon_i + a}{a - \delta} \iff \frac{1 - \gamma_i}{\gamma_i} = \frac{-a\varepsilon_i + a}{a\varepsilon_i - \delta}, \quad (\text{A.4})$$

$$\eta_i := k_i \frac{a - \delta}{\delta} \left(\frac{\delta}{\varepsilon_i} \frac{u_i}{k_i a} \right)^{\frac{a}{a-\delta}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i - 1} \right)^{-(\gamma_i-1)}. \quad (\text{A.5})$$

Characterization of value functions by ODEs: (“Ansatz”: separable functions)

$$r_i \alpha_i \beta(y) = \left(\eta_i (c_i + \alpha_i \beta'(y))^{-(\gamma_i-1)} - \sum_{j \neq i} (\gamma_j - 1) \eta_j (c_j + \alpha_j \beta'(y))^{-\gamma_j} \cdot \alpha_i \beta'(y) \right) \psi(y)^{\frac{a}{a-\delta}}. \quad (\text{A.6})$$

Explicit solution formulas of α_i^* (all $c_i = 0$):

$$\alpha_i^* = \left(\frac{\gamma_i \eta_i}{r_i + Z} \right)^{1/\gamma_i} = \left(\frac{1}{\eta_i \gamma_i} \left(r_i + \left(\sum_j \frac{\gamma_j - 1}{\gamma_j} r_j \right) \right) / \left(1 - \sum_j \frac{\gamma_j - 1}{\gamma_j} \right) \right)^{\frac{-1}{\gamma_i}}. \quad (\text{A.7})$$

Bernoulli differential equation for $\beta(y)$ (market effect):

$$\begin{aligned} \beta(y) \beta'(y)^{\gamma-1} = \psi(y)^{\frac{a}{a-\delta}} &\iff \beta(y)^{-1} \beta'(y)^{1-\gamma} \psi(y)^{\frac{a}{a-\delta}} \\ &\iff \frac{\beta(y)}{\beta'(y)} = \beta(y)^{\frac{a\epsilon-\delta}{a\epsilon-a}} \psi^{\frac{-1}{\epsilon-1}} = \psi^{\frac{a}{a-\delta}} \beta'(y)^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Case I. (Special form of (A.6)):

$$r_i \alpha_i = \left(\eta_i \alpha_i^{-(\gamma-1)} - \sum_{j \neq i} \underbrace{(\gamma-1) \eta_j \alpha_j^{-\gamma}}_{z_j} \alpha_i \right) \underbrace{\beta'(y)^{-(\gamma-1)} / \beta(y) \psi(y)^{a/(a-\delta)}}_1. \quad (\text{A.9})$$

B Proofs

Proof of Lemma 2.1

We shall subdivide the proof into three main parts, (i) reducing the system of equations to the analysis of a particular nonlinear equation, (ii) existence of a solution of this particular equation and (iii) uniqueness. Each part will be subdivided into several steps. In Part 1, we show how the analysis of the system of equations can be reduced to the analysis of a particular nonlinear equation in one unknown. The final part, Part 4, exhibits explicit solution formulas of the components α_i if all cost parameters are zero.

Part 1: Reducing the system to one equation

If there is a positive vector $\vec{\alpha} = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ such that

$$r_i = \eta_i (c_i + \alpha_i)^{-\gamma_i} (c_i / \alpha_i + 1) - \sum_{j \neq i} \underbrace{(\gamma_j - 1) \eta_j (c_j + \alpha_j)^{-\gamma_j}}_{z_j}, \quad (\text{B.1})$$

then simple algebra shows that $\vec{\alpha}$ satisfies the system of equations, $1 \leq i \leq n$,

$$r_i = \left(\frac{c_i}{\alpha_i} + \gamma_i \right) \eta_i (c_i + \alpha_i)^{-\gamma_i} - Z, \quad (\text{B.2})$$

where $Z := \sum_j z_j$ and z_i is defined in Lemma 2.1. For any i , $\xi > 0$, we define n real valued functions f_i on the positive real line,

$$f_i(\xi) := \left(\frac{c_i}{\xi} + \gamma_i \right) \eta_i(c_i + \xi)^{-\gamma_i} - r_i. \quad (\text{B.3})$$

Note, if $\vec{\alpha}$ satisfies (B.2) then $f_1(\alpha_1) = f_2(\alpha_2) = \dots = f_n(\alpha_n) = Z$. Observe, each function f_i is strictly monotone decreasing, $f_i(0+) = +\infty$, and $\lim_{\xi \rightarrow \infty} f_i(\xi) = -r_i$. Without loss of generality, let $r_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i\}$. We define $\alpha_i^{MAX} := f_i^{-1}(-r_1)$ and consider the intervals $(0, \alpha_i^{MAX})$, $1 \leq i \leq n$; note, $\alpha_1^{MAX} = +\infty$, and $\alpha_i^{MAX} < \infty$ if $r_i > r_1$. Thus, for any i , $1 \leq i \leq n$, the range of f_i when each f_i is restricted to its interval $(0, \alpha_i^{MAX})$ is the same as the range of f_1 . Hence, for any element κ in $\text{range}\{f_1\} = (-r_1, \infty)$, i.e. $\kappa = f_1(\xi)$, $\xi > 0$, there is a unique element $f_i^{-1}(f_1(\xi)) =: \chi_i(\xi)$ in $(0, \alpha_i^{MAX})$ such that

$$\kappa = f_1(\xi) = f_i(\chi_i(\xi)).$$

We are looking for positive vectors $\vec{\alpha} = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ which solve system (B.2). If $\vec{\alpha}$ is positive then $\vec{z} = (z_i)_{1 \leq i \leq n}$ is a positive vector and $Z = \sum_j (\gamma_j - 1) \eta_j(c_j + \alpha_j)^{-\gamma_j}$ has to be a positive number; moreover, the values $f_i(\alpha_i)$ have to be positive as well. Since $f_i(\xi)$ is negative whenever $\xi \geq \alpha_i^{MAX}$, any component α_i of a positive solution vector $\vec{\alpha}$ needs to be less than α_i^{MAX} .

To find the first component α_1 of a solution $\vec{\alpha}$ we define a particular non negative monotone increasing function G on $(0, \infty)$, viz.

$$G(\xi) := \sum_j (\gamma_j - 1) \eta_j(c_j + \chi_j(\xi))^{-\gamma_j}. \quad (\text{B.4})$$

We observe that if α_1 is the first component of a solution then the equation $G(\alpha_1) = f_1(\alpha_1)$ has to be satisfied. Next, we shall verify that the equation $G(\xi) = f_1(\xi)$ has at least one solution $\xi > 0$. Afterwards, cf. Part 3, we will show that the equation has exactly one solution. If α_1 is known, then all other components of a positive solution vector $\vec{\alpha}$ are given by $\alpha_j = \chi_j(\alpha_1)$, $2 \leq j \leq n$.

Part 2: Existence (a necessary and sufficient condition)

To prove existence, we shall employ the Intermediate Value Theorem. To be specific, we verify that

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f_1(\xi) > \lim_{\xi \rightarrow 0} G(\xi),$$

i.e. the graph of f_1 lies above the graph of G in a neighbourhood of zero, while G dominates f_1 for large values ξ . The last statement is obvious since

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} f_1(\xi) = -r_1 < 0 \leq \lim_{\xi \rightarrow \infty} G(\xi). \quad (\text{B.5})$$

To see that f_1 dominates G in a neighbourhood of zero we observe that $\lim_{\xi \rightarrow 0} \chi_j(\xi) = 0$, $1 \leq j \leq n$. This follows from the fact that $\lim_{\xi \rightarrow 0} f_j^{-1}(f_1(\xi)) = 0$. The behaviour of G in a neighbourhood of zero depends on how many cost coefficients c_j are positive. If all

c_j are positive then $G(0+)$ is finite while $f_1(0+) = \infty$. If there is at least one parameter c_j which is equal to zero then $G(0+) = 0$. To see that G stays below f_1 we analyze the quotient of both functions G and f_1 . Applying l'Hopital's rule we obtain

$$\frac{G'(\xi)}{f_1'(\xi)} = \frac{\sum_j (\gamma_j - 1) \eta_j (-\gamma_j) (c_j + f_j^{-1}(f_1(\xi)))^{-\gamma_j-1} \frac{f_1'(\xi)}{f_j'(f_j^{-1}(f_1(\xi)))}}{f_1'(\xi)}$$

To streamline the expression on the right hand side of this equation we use the abbreviation $\xi_j := \chi_j(\xi) = f_j^{-1}(f_1(\xi))$. Since $\xi_j < \alpha_j^{MAX}$, the inequality $f_j'(\xi_j) < 0$ follows. Hence, taking the derivatives of all functions f_j , simple algebra yields

$$\begin{aligned} \frac{G'(\xi)}{f_1'(\xi)} &= \sum_j \frac{(\gamma_j - 1) \eta_j \gamma_j (c_j + \xi_j)^{-\gamma_j-1}}{-f_j'(\xi_j)} \\ &= \sum_j \frac{(\gamma_j - 1) \eta_j \gamma_j (c_j + \xi_j)^{-\gamma_j-1}}{\frac{c_j}{\xi_j^2} \eta_j (c_j + \xi_j)^{-\gamma_j} + \left(\frac{c_j}{\xi_j} + \gamma_j\right) \eta_j \gamma_j (c_j + \xi_j)^{-\gamma_j-1}} \\ &= \sum_j \frac{(\gamma_j - 1) \gamma_j}{(c_j/\xi_j)^2 + (c_j/\xi_j)(\gamma_j + 1) + \gamma_j^2}. \end{aligned} \quad (B.6)$$

If ξ converges to zero we get

$$\frac{G(0+)}{f_1(0+)} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{G'(\xi)}{f_1'(\xi)} = \sum_{\substack{j=1: \\ c_j=0}}^n \frac{\gamma_j - 1}{\gamma_j} = \begin{cases} \sum_j (1 - 1/\gamma_j) & , \text{ all } c_j = 0 \\ 0 & , \text{ all } c_j > 0 \end{cases}. \quad (B.7)$$

Next, we consider the two cases: $\sum_{\substack{j=1: \\ c_j=0}}^n (1 - 1/\gamma_j) \geq 1$ and $\sum_{\substack{j=1: \\ c_j=0}}^n (1 - 1/\gamma_j) < 1$. In the first case, the fact that the sum is greater or equal to one together with (B.7) implies, $\xi > 0$,

$$\frac{G'(\xi)}{f_1'(\xi)} = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j - 1}{\gamma_j} \geq \sum_{\substack{j=1: \\ c_j=0}}^n \frac{\gamma_j - 1}{\gamma_j} \geq 1.$$

Thus, the (negative) slope of G is steeper than the (negative) slope of f_1 . Since G dominates f_1 in a neighbourhood of infinity and $G'(\xi) \leq f_1'(\xi) < 0$, the difference between G and f_1 will always be positive on $(0, \infty)$. Hence, if $\sum_{\substack{j=1: \\ c_j=0}}^n (1 - 1/\gamma_j) \geq 1$ there will never be a solution of (B.1).

On the other hand, (B.7) implies that the condition of the commons, $\sum_{\substack{j=1: \\ c_j=0}}^n (1 - 1/\gamma_j) < 1$, is necessary and sufficient for a solution of $G(\xi) = f_1(\xi)$ to exist. Observe that the strict inequality and (B.7) imply G to be dominated by f_1 in a neighbourhood of zero. Together with (B.5), at least one solution $\alpha_1 > 0$ exists. Remember, if all unit cost coefficients c_j are positive then the condition of the commons is always satisfied.

Part 3: Uniqueness

Assume the condition of the commons to hold. Part 2 implies that there is at least one solution of

$$G(\alpha_1) = f_1(\alpha_1). \quad (\text{B.8})$$

Since the graph of f_1 starts above the graph of G and ends below it the number of intersections of the two functions is odd. Should there be more than one solution of (B.8) then the functions G and f_1 intersect at least 3 times, and by the Mean Value Theorem the functions have to have the same slope at two different locations. To see that this last statement contradicts (B.6) we distinguish between the following two possibilities, (i) all c_j are zero, and (ii) there is at least one positive c_j . If all c_j are zero then $G'(\xi)/f_1'(\xi) = \sum_{j=1}^n (1 - 1/\gamma_j)$, and the slopes of f and G at any ξ are never the same if a solution of (B.8) exists.

Should there be at least one positive cost coefficient, say c_l , then $G'(\xi)/f_1'(\xi)$ is strictly monotone increasing, and there can be only one location where the slopes are the same. To see that the ratio G'/f_1' is a strictly monotone increasing function observe that each denominator of the terms of the right hand side of (B.6) is decreasing in the variable $\xi_j = \chi_j(\xi_1)$, and the term involving the variable ξ_l is strictly decreasing in ξ_l . Moreover, $\chi_j(\xi_1)$ is monotone increasing in ξ_1 . Hence, the ratio $G'(\xi_1)/f_1'(\xi_1)$ is a strictly increasing function too. Thus, the uniqueness of a positive solution α_1 of (B.8) as well as the uniqueness of a positive solution vector $\vec{\alpha}$ of (B.1) follows.

Part 4: Explicit Solution Formulas (all unit costs c_j are equal to zero)

To conclude, we display the explicit solution of equation (B.2), if all $c_i = 0$. If all cost coefficients are zero (B.2) simplifies, i. e. $f_i(\alpha_i) = \gamma_i \underbrace{\eta_i \alpha_i^{-\gamma_i}}_{z_i/(\gamma_i-1)} - r_i = \sum_j z_j = Z$. This system

of equations is equivalent to

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_i - 1} z_i = r_i + \sum_j z_j \iff z_i = \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i} (Z + r_i), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (\text{B.9})$$

Taking the sum of all z_i we obtain

$$Z = \sum_i \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i} r_i \Big/ \left(1 - \sum_i \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i} \right) > 0. \quad (\text{B.10})$$

Using the definition of α_1 in terms of z_i , see above, and using (B.9) and (B.10) we can express the unique solution values α_1 in terms of the parameter u_i , k_i and all r_j , γ_j , $1 \leq j \leq n$:

$$\alpha_i := \left(\frac{z_i}{\eta_i(\gamma_i - 1)} \right)^{-1/\gamma_i} - c_i = \left(\frac{Z + r_i}{\eta_i \gamma_i} \right)^{-1/\gamma_i}.$$

Proof of Lemma 2.2 (properties of $\beta(y)$, the solution of the Bernoulli equation)

Elementary calculations show that $\beta(y) = B(y)^{1-1/\gamma}$ is a solution of the Bernoulli equation (2.9), see Lemma 2.2. The facts that β and B are increasing functions are an immediate

consequence of formula (2.8). It remains to show that $\beta(y)$ is concave on $[0, N]$ if the condition $\psi'(y)\psi(y)^{\frac{-\varepsilon}{\varepsilon-1}}B(y) < \frac{1-\delta}{a}$ holds. Since $\beta'(y) = B(y)^{-\frac{1}{\gamma}}\psi(y)^{\frac{1}{\varepsilon-1}}\psi'(y)$ the second derivative of β is given by $\beta''(y) = \frac{-1}{\gamma-1}B(y)^{\frac{-1-\gamma}{\gamma}}\psi(y)^{\frac{2}{\varepsilon-1}} + B(y)^{\frac{-1}{\gamma}}\frac{1}{\varepsilon-1}\psi(y)^{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon-1}}\psi'(y)$, and the assertion follows. \blacklozenge

Proof of Theorem 3.1

By definition, see Section 2, $\dot{y} = -\lambda$, where $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Using the optimality conditions (A.1) and (A.2) we obtain

$$\begin{aligned}
\lambda_i^*(y) &= u_i w_i^{*\delta}(y) p_i^{*-\varepsilon}(y) \psi(y) \\
&= u_i \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right)^{\frac{-\varepsilon a + \delta}{a-\delta}} \left(\frac{\delta u_i}{\varepsilon a} \right)^{\frac{\delta}{a-\delta}} \psi(y)^{\frac{a}{a-\delta}} (c_i + \partial_y V_i(y))^{\frac{-\varepsilon_i a + \delta}{a-\delta}} \\
&= \frac{u_i \delta}{a-\delta} \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i-1} \right)^{-1} \frac{\varepsilon_i a}{\delta u_i} \frac{a-\delta}{\delta} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i-1} \right)^{\frac{-\varepsilon_i a + a}{a-\delta}} \left(\frac{\delta u_i}{\varepsilon_i a} \right)^{\frac{a}{a-\delta}}}_{\eta_i} \\
&\quad \psi(y)^{\frac{a}{a-\delta}} \underbrace{(c_i + \partial_y V_i(y))^{\frac{-\varepsilon_i a + \delta}{a-\delta}}}_{c_i + \alpha_i \beta'(y)} \\
&= \frac{a \varepsilon_i - a}{a-\delta} \eta_i \psi(y)^{\frac{a}{a-\delta}} (c_i + \alpha_i \beta'(y))^{-\gamma} \\
&\stackrel{Case I}{=} (\gamma-1) \eta_i \psi(y)^{\frac{a}{a-\delta}} \alpha_i^{-\gamma} \beta'(y)^{-\gamma} \\
&= z_i \frac{\beta(y)}{\beta'(y)} = z_i B(y) \psi(y)^{\frac{-1}{\varepsilon-1}}.
\end{aligned}$$

Taking the sum of all $\lambda_i^*(y)$ we obtain

$$\lambda(y) = Z \frac{\beta(y)}{\beta'(y)}. \quad (\text{B.11})$$

Since the Bernoulli differential equation (2.9) can be written equivalently as

$$\frac{\beta(y)}{\beta'(y)} = B(y) \psi(y)^{\frac{-1}{\varepsilon-1}},$$

elementary transformations yield the formula of λ . To see (3.2), evaluate (B.11) along an optimal trajectory $y(t)$. Multiplying (B.11) by $\beta'(y(t))$ yields the differential equation

$$\dot{\beta(y(t))} = \beta'(y(t)) \dot{y}(t) = -Z \beta(y(t)).$$

Since $y(0) = N$, we obtain the formula $\beta(y(t)) = \beta(N) e^{-Zt}$. Since B is strictly increasing (3.2) follows. Since $-\frac{\dot{y}}{Z} = \frac{\beta(y)}{\beta'(y)}$, cf. (B.11), integrating the individual rates $\lambda_i^*(y(t))$ yields the accumulated sales of each company:

$$x_i(t) = \int_0^t \lambda_i^*(y(s)) ds = z_i \int_0^t \frac{\beta(y(s))}{\beta'(y(s))} ds = -\frac{z_i}{Z} \int_0^t \dot{y}(s) ds = \frac{z_i}{Z} (N - y(t)).$$

◆

Proof of Theorem 4.1

It follows from the proof of Theorem 3.1 that, $1 \leq i \leq n$,

$$\lambda_i^*(y) = \frac{a\varepsilon_i - a}{a - \delta} \eta_i \psi(y)^{\frac{a}{a-\delta}} (c_i + \alpha_i \beta'(y))^{\frac{-\varepsilon_i a + \delta}{a-\delta}} \stackrel{\text{Case II}}{=} z_i y.$$

Taking the sum of the individual rates of sales implies

$$\lambda^*(y(t)) = y(t)Z = -\dot{y}(t), \quad \text{where } y(0) = N.$$

The solution of this elementary differential equation is $y(t) = e^{-Zt}N$.

When integrating the individual rates $\lambda_i^*(y)$ we get

$$x_i(t) = \int_0^t \lambda_i^*(y(s)) ds = z_i \int_0^t y(s) ds = z_i \int_0^t e^{-Zs} N ds = N z_i / Z (1 - e^{-Zt}).$$

C Tables

i	c_i	V_i	% sales	U_i	C_i	W_i	\bar{p}_i
1	8	59.91	50.01	194.04	80.23	53.90	19.35
2	10	42.19	30.34	142.66	60.84	39.63	23.45
3	12	31.58	19.65	109.21	47.29	30.34	27.71

Table 6: Technology: Different production costs c_i ; Example 4.2

i	r_i	V_i	% sales	U_i	C_i	W_i	\bar{p}_i
1	0.08	651.29	32.71	171.28	72.41	47.58	23.65
2	0.10	42.99	33.39	145.20	61.87	40.33	23.47
3	0.12	37.00	33.90	126.01	54.01	35.00	23.33

Table 7: Financing costs: Different discount rates r_i ; Example 4.2

i	k_i	V_i	% sales	U_i	C_i	W_i	\bar{p}_i
1	0.8	653.41	39.71	177.84	75.03	49.40	23.70
2	1.0	42.80	32.62	144.59	61.62	40.16	23.46
3	1.2	35.70	27.67	121.82	52.27	33.84	23.30

Table 8: Advertising costs: Different parameters k_i ; Example 4.2

References

- [1] Carmona, R., Delarue, F and Lachapelle, A. (2011). A Mean Field Game Approach to Oil Production. *Journal of Mathematical Economics* **47** (7).
- [2] Chintagunta, P. K., Rao, V. R. and Vilcassim, N. J. (1993). Equilibrium pricing and advertising strategies for nondurable experience products in a dynamic duopoly. *Managerial and Decision Economics* **14** (3), 221–234.
- [3] Dockner, E. J. and Feichtinger, G. (1986). Dynamic advertising and pricing in an oligopoly: A Nash equilibrium approach. In: Basar, T. (Ed.), Proceedings of the Seventh Conference on Economic Dynamics and Control. Springer, Berlin, 238–251.
- [4] Dockner, E. J., Jørgensen, S., van Long, N. and Sorger, G. (2000). Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge University Press.
- [5] Erickson, G. M. (2009). An Oligopoly Model of Dynamic Advertising Competition. *European Journal of Operational Research* **197** (1), 374–388.

- [6] Erickson, G. M. (2011). *A Differential Game Model of the Marketing-Operations Interface*. *European Journal of Operational Research* **211** (2), 394–402.
- [7] Fruchter, G. E. (1999). The Many-Player Advertising Game. *Management Science* **45** (11), 1609–1611.
- [8] Fruchter, G. E. and Kalish, S. (1998). Dynamic Promotional Budgeting and Media Allocation. *European Journal of Operational Research* **111** (1), 15–27.
- [9] Harris, C., Howison, S. and Sircar, R. (2010). Games with Exhaustible Resources. *SIAM J. Applied Mathematics* **70** 2556–2581.
- [10] Helmes, K. and Schlosser, R. (2013). Dynamic Advertising and Pricing with Constant Demand Elasticities. *Journal of Economic Dynamics and Control* **37**, 2814–2832.
- [11] Helmes, K., Schlosser, R. and Weber, M. (2013). Optimal Advertising and Pricing in a Class of General New-Product Adoption Models. *European Journal of Operational Research* **229**, 433–443.
- [12] Huang, J., Leng, M. and Liang, L. (2012). Recent Developments in Dynamic Advertising Research. *European Journal of Operational Research* **220**, 591–609.
- [13] Jørgensen, S. and Zaccour, G. (2004). *Differential Games in Marketing*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.
- [14] Krishnamoorthy, A., Prasad, A. and S. P. Sethi (2010). Optimal Pricing and Advertising in a Durable-Good Duopoly. *European Journal of Operational Research* **200**, 486–497.
- [15] Ledvina, A. and Sircar, R. (2011). Dynamic Bertrand Oligopoly. *Applied Mathematics and Optimization* **63**, 11–44.
- [16] Mahajan, V. and Muller, E. (1979). Innovation Diffusion and New Product Growth Models in Marketing. *Journal of Marketing* **43** (4), 55–68.
- [17] Mahajan, V., Muller, E. and Bass, F. M. (1990). New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Directions for Research. *Journal of Marketing* **54** (1), 1–26.
- [18] Mahajan, V., Muller, E. and Wind, J. (2000). *New Product Diffusion Models*. Kluwer Academic Publishers, New York.
- [19] Mansfield, E. (1961). Technical Change and the Rate of Imitation. *Econometrica* **29**, 741–766.
- [20] Peres, R., Muller, E. and Mahajan, V. (2010). Innovation Diffusion and New Product Growth Models: A Critical Review and Research directions. *Intern. Journal of Research in Marketing* **27**, 91–106.
- [21] Prasad, A. and Sethi, S. P. (2003). Dynamic Optimization of an Oligopoly Model of Advertising. UTD School of Management, Working Paper.

- [22] Sethi, S. P., Prasad, A. and He, X. (2008). Optimal Advertising and Pricing in a New-Product Adoption Model. *Journal of Optimization Theory and Applications* **139** (2), 351–360.
- [23] Teng, J.-T., and Thompson, G. L. (1984). Optimal pricing and advertising policies for new product oligopoly models. *Marketing Science* **3** (2), 148–168.

IV Stochastische Dynamische Preissetzung im Mehrproduktfall mit Dynamischem Werbeeinfluss

Abstract

Das Manuskript untersucht stochastische dynamische Mehrproduktmodelle für langlebige und verderbliche Produkte. Neben den Preisen der Produkte verschiedener Kategorien wird eine übergreifende Werbekomponente in stetiger Zeit gesteuert. Zusätzlich werden zustandsabhängige Adoptionseffekte sowie Produktions- und Lagerkosten berücksichtigt. Für spezielle Modelle mit isoelastischer Nachfrage und endlichem bzw. unendlichem Zeithorizont leiten wir explizite Lösungsformeln für die Wertefunktion und die optimalen Kontrollen in feedback Form her. Darüber hinaus werden Simulationstechniken und die Berechnung von Zustandswahrscheinlichkeiten genutzt, um optimal gesteuerte Abverkaufsprozesse auszuwerten. Das der Lösung zugrunde liegende vorgestellte rekursive Berechnungsverfahren ist allgemein genug, um auch auf verwandte Problemvarianten mit diskreten mehrdimensionalen Zustandsräumen übertragen zu werden.

1 Einleitung

Die behandelte Thematik ist Teil des Revenue Managements, welches eines der sehr erfolgreichen Anwendungsgebiete des Operations Research repräsentiert und allgemein einen Mix aus Methoden zur Nachfrageprognose, Preisdifferenzierung und Kapazitätssteuerung beinhaltet.

Traditionelle Fragestellungen und Lösungskonzepte des Revenue Managements sind beispielsweise in den Büchern von Talluri, van Ryzin (2004) und Phillips (2005) ausführlich dargestellt. Die Literaturverzeichnisse dieser Bücher und auch die Artikel von Bitran, Caldentey (2003), Elmaghraby, Keskinocak (2003), Shen, Su (2007) und Gönsch et al. (2009) geben einen guten Überblick über die umfangreiche Literatur zur dynamischen Preissetzung. Die in unserem Modell neben der Preisdifferenzierung enthaltene Werbekomponente stellt eine Verbindung zum Marketing her. Ausführliche Darstellungen dazu findet man z.B. in Sethi, Thompson (2000), Steffenhagen (2006) und Bagwell (2007). Weiterhin sind die Übersichtsartikel von Feichtinger, Hartl, Sethi (1994) und Huang, Leng, Liang (2012) hervorzuheben.

Neben vielen Arbeiten zu stochastischen Einproduktmodellen gibt es vergleichsweise wenige Arbeiten die den komplexeren Mehrproduktfall betrachten. Der Stand der Forschung bis 2009 ist in diesem Zusammenhang in Gönsch et al. (2009), Abschnitt 5.2 S. 20 ff. zusammengefasst. Die wichtigen Arbeiten von Gallego, van Ryzin (1997), Bertsimas, de Boer (2005) und Gershkov, Moldovano (2009) sind Beispiele für monopolistische Mehrproduktmodelle und gesondert zu nennen. Die aktuelle Arbeit von Gallego, Wang (2013) betrachtet den Verkauf mehrerer Produktklassen unter einer Oligopol-situation, wobei

die Nachfrage von exponentiellem Typ ist. In den genannten Arbeiten werden jedoch Werbe- und Adoptionseffekte sowie Diskontierung und Lagerkosten i.A. nicht berücksichtigt.

Die potentiellen Anwendungsfelder der Theorie des Revenue Managements sind vielseitig. Allgemein sind vor allem die Lagerhaltung und der elektronische Handel zu nennen. Prominente Beispiele sind das Airline Management und die Hotel Branche. Dabei findet sich der simultane Verkauf von mehreren Produktklassen (evtl. mit übergreifender Firmen-Werbung) in vielen Anwendungen wieder. In Abhängigkeit der Haltbarkeit der Produkte können z.B. der Verkauf von Modeartikeln, Blumen oder Früchten (verderblich) bzw. Gebrauchtwagen und technische Geräten (langlebig) genannt werden.

Der Fakt, dass einzelne Produkttypen oft nicht individuell sondern nur indirekt über das Gesamtsortiment durch Firmenwerbung beworben werden (vgl. Airline Tickets, Supermarkt, Baumarkt, Modeartikel) motiviert die Einbeziehung von Werbung in dynamische Preissetzungsmodelle im Rahmen von Mehrproduktproblemen.

Unsere Arbeit baut auf der Veröffentlichung Helmes, Schlosser (2013), vgl. Kapitel 1, auf und verallgemeinert diese in vielfältiger Weise. Eine ganz wesentliche Erweiterung der vorliegenden Arbeit gegenüber Kapitel 1 ist neben der Analyse von Mehrproduktmodellen die Möglichkeit, auch Stückkosten, Lagerkosten und Adoptionseffekte berücksichtigen zu können.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt 2 beschreiben wir am Beispiel isoelastischer Nachfrage das stochastische dynamische Mehrproduktmodell mit Produktions- und Lagerkosten. Der Zustandsraum enthält dabei die Information der individuellen Restlagerbestände bzw. der realisierten Abverkäufe und erlaubt die zusätzliche Berücksichtigung von Adoptionseffekten unter den verschiedenen Produkten. Auf Basis der Optimalitätsbedingungen für alle Preise und die Werberate leiten wir eine dynamische Mehrproduktversion der Dorfman-Steiner Identität her.

In Abschnitt 3 betrachten wir Modellvarianten mit unendlichem Zeithorizont und stellen ein rekursives Lösungsverfahren vor. Die Existenz und Eindeutigkeit der bestimmten Lösung der assoziierten Bellman Gleichung wird nachgewiesen. Als Spezialfall erhalten wir die Lösung des stochastischen Einproduktmodells mit beliebigen Adoptionseffekten. Wir illustrieren die Ergebnisse an verschiedenen numerischen Beispielen mit produktspezifischen Produktions- und Lagerkosten. Es werden detaillierte Auswertungen der optimalen Politiken sowie der erwarteten Verkaufsergebnisse hergeleitet. Wir deuten zudem an, wie das vorgestellte rekursive Lösungsverfahren auch für die Lösung von Problemen mit anderen preis- und werbeabhängigen Verkaufsraten genutzt werden kann.

In Abschnitt 4 analysieren wir das vorgestellte Mehrproduktproblem mit endlichem Zeithorizont und zeitabhängiger Nachfrage. Im speziellen Fall ohne Produktions- und Lagerkosten wird eine explizite Lösung der Bellman Gleichung konstruiert. Die Lösung basiert auf einem Separabilitätsansatz, welcher den Einfluss von Zeit und dem mehrdimensionalen Produktrestbestand voneinander trennt. Durch die spezifische Struktur der Lösung ist die analytische Auswertung der optimalen feedback Strategien u.a. durch die Bestimmung von Zustandswahrscheinlichkeiten möglich und erlaubt Einblicke in die komplexe Wirkungsweise monopolistischer Mehrproduktprobleme mit endlichem Zeithorizont. Darüber hinaus kann die Lösung zur Verifizierung numerischer Verfahren genutzt werden. Effiziente Simulationsmethoden werden vorgestellt und illustrative Beispiele gegeben.

2 Modellbeschreibung

Ein Monopolist verkauft I verschiedene Produkte. Mit $N_i \in \mathbb{N}$, $N_i < \infty$, $1 \leq i \leq I$, bezeichnen wir die Anfangsbestände der verschiedenen Produkte. Der Zeithorizont wird mit T bezeichnet und kann endlich oder unendlich sein. Wir unterstellen, dass beim Verkauf eines Produkts der Klasse i Verkaufs-/Produktionskosten in Höhe von c_i anfallen. Bei gegebenem produktspezifischen positiven Besteuerungsparameter v_i , $1 \leq i \leq I$, erzielt der Monopolist beim Verkauf einer Einheit der Klasse i zum Preis p_i den Umsatz $v_i \cdot p_i - c_i$. Die mit $r(t)$ bezeichnete nichtnegative Diskontierungsrate kann zeitabhängig sein, und wir definieren $R(t) := \int_0^t r(s) ds$. Wir unterstellen myopische Kunden, welche nicht strategisch agieren. Ankommende interessierte Kunden entscheiden und „vergessen“. Preisantizipationen oder ein gezieltes Wiederkehren werden im Modell nicht berücksichtigt.

Ferner gehen wir von einer allgemeinen positiven zeitabhängigen Kundenankunftsintensität $u(t)$ aus, die der Monopolist durch den Einsatz eines übergreifenden Werbekanals beeinflussen kann, siehe unten, indem er die Werberaten dynamisch festlegt. Die Wirkung der Werbung sei multiplikativ, konkav steigend und beschrieben durch w^δ , wobei die Werbeelastizität $0 \leq \delta < 1$ konstant ist. Die Kosten der Werbung werden mit $k(t) \cdot w$ angesetzt, wobei $k(t)$ eine gegebene nichtnegative Parameterfunktion ist. Die Nachfrageelastizität wird als zeitunabhängig aber produktspezifisch mit $\varepsilon_i > 1$, $1 \leq i \leq I$, angenommen.

Motiviert durch die gegenseitige Beeinflussung von Produktverkäufen (Nachfüllpack, Buch 2. Teil, Substitute, ect.) wollen wir auch Adoptionseffekte berücksichtigen. Genauer nehmen wir an, dass sich in Abhängigkeit der verschiedenen Verkaufszahlen bzw. dem Vektor der Restlagerbestände $\vec{n} := (n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_I)$ positive produktspezifische Adoptionsfaktoren $\chi_{\vec{n}}^{(i)}$ auf die Nachfragerate der jeweils i -ten Produktklasse auswirken. Die Anzahl n_i steht für die Restmenge in Klasse i ; die entsprechende Anzahl verkaufter Artikel ist $N_i - n_i$. Wir definieren die durch die Wahl von Preis und Werbung zu steuernde Verkaufsrate für die Produktklasse i als, $1 \leq i \leq I$,

$$\lambda_{\vec{n}}^{(i)}(t, p_i, w) := u(t) \cdot w^\delta \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i}.$$

Für alle Zeitpunkte und Restbestandskonstellationen sind positive Preisentscheidungen zu treffen und eine Werberate festzulegen. Wir bezeichnen Politiken $(\vec{p}_t, w_t)_t$ als zulässig, wenn sie der Menge der nicht vorgreifenden Markovschen Rückkopplungssteuerungen $\vec{p}_{\vec{n}}(t) > 0$ und $w_{\vec{n}}(t) \geq 0$ entstammen, welche von der Zeit t und dem Zustand \vec{n} abhängen. Zufällige Restbestände zum Zeitpunkt t werden mit $\vec{Y}_t := (Y_t^{(1)}, \dots, Y_t^{(I)})$ bezeichnet. Für kleine Zeitintervalle h ist die Dynamik des Bestandsprozesses $(\vec{Y}_t)_t$ durch die Übergangswahrscheinlichkeiten, $0 \leq i, j \leq N$,

$$P[\vec{Y}_{t+h} = \vec{m} | \vec{Y}_t = \vec{n}] \approx \begin{cases} \lambda_{\vec{n}}^{(i)}(t, p, w) \cdot h & , m_i = n_i - 1, m_j = n_j \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, I \\ 1 - \sum_{j=1, \dots, I} \lambda_{\vec{n}}^{(j)}(t, p, w) \cdot h & , m_j = n_j \quad j = 1, \dots, I \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

(approximativ) beschrieben; für Details zu mehrdimensionalen Poissonprozessen verweisen wir auf Ethier, Kurtz (1986), Kap. VI. Das (vorzeitige) Verkaufsende τ ist der erste Zeitpunkt, in dem sämtliche Produkte aller Klassen verkauft sind, d.h. $\tau := \min_{0 \leq t \leq T} \{t : \vec{Y}_t = (0, \dots, 0)\} \wedge T$.

Darüber hinaus wollen wir Lagerkosten berücksichtigen. In Abhängigkeit der einzelnen aktuellen Lagerbestände, d.h. des Zustands \vec{n} , können die Lagerkosten durch die Kostenrate $L_{\vec{n}}$ beschrieben werden, wobei $L_{\vec{0}} := 0$ ist. Produktspezifische Lagerkosten pro Einheit lassen sich beispielsweise mittels der Raten $l_i \geq 0$, $1 \leq i \leq I$, erfassen, indem wir speziell $L_{\vec{n}} := \sum_i l_i \cdot n_i$ definieren.

Ziel des Entscheiders ist es für gegebene Anfangsbestände $\vec{N} := (N_1, \dots, N_I)$ eine zulässige Politik, welche die Summe der erwarteten diskontierten Gewinne innerhalb der Zeiträume zwischen 0 und T (bzw. τ) maximiert, zu bestimmen. In diesem Zusammenhang entspricht unser monopolistisches Mehrprodukt-Verkaufsproblem der Maximierung von

$$E \left[\int_0^{\tau \wedge T} e^{-R(t)} \cdot \left(\sum_{i=1,2,\dots,I} \lambda_{\vec{Y}_t}^{(i)}(t, p_{\vec{Y}_t}^{(i)}(t), w_{\vec{Y}_t}(t)) \cdot (v_i \cdot p_{\vec{Y}_t}^{(i)}(t) - c_i) - k(t) \cdot w_{\vec{Y}_t}(t) - L_{\vec{Y}_t} \right) dt \mid \vec{Y}_0 = \vec{N} \right]. \quad (2.1)$$

Um unser Problem zu lösen, wollen wir die assoziierte Wertefunktion $V_{\vec{n}}(t)$ bestimmen, welche – bedingt an den Zustand \vec{n} respektive die Restbestandskonstellation $\vec{Y}_t = \vec{n}$ im Zeitpunkt t – die optimalen erwarteten diskontierten Gewinne ab t beschreibt. Die Wertefunktion $V_{\vec{n}}(t)$ ist charakterisiert durch die dem dynamischen Problem zugeordnete Bellman-Gleichung, $0 \leq t < T$, $\vec{0} < \vec{n} \leq \vec{N}$,

$$-\dot{V}_{\vec{n}}(t) + r(t) \cdot V_{\vec{n}}(t) + L_{\vec{n}} = \sup_{\vec{p} > 0, w \geq 0} \left\{ u(t) \cdot w^\delta \cdot \sum_{i=1,\dots,I} \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot (v_i \cdot p_i - c_i - \Delta_i V_{\vec{n}}(t)) - k(t) \cdot w \right\} \quad (2.2)$$

mit den üblichen natürlichen Randbedingungen $V_{\vec{0}}(t) = 0$ für alle $0 \leq t \leq T$; im Falle eines endlichen Zeithorizonts, d.h. $T < \infty$, kommen noch die Randbedingungen $V_{\vec{n}}(T) = 0$ für alle $0 \leq n_i \leq N_i < \infty$, $1 \leq i \leq I$ hinzu. Die Opportunitätskosten des Verkaufs eines Produktes der Klasse i sind gegeben durch $\Delta_i V_{\vec{n}}(t) := V_{(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_I)}(t) - 1_{\{n_i > 0\}} \cdot V_{(n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots, n_I)}(t)$, $1 \leq i \leq I$. Die notwendigen Optimalitätsbedingungen, vgl. (2.2), für alle Preise und die Werberate lauten, $0 \leq t < T$, $\vec{0} < \vec{n} \leq \vec{N}$,

$$p_{\vec{n}}^{(i)}(t) = \frac{\varepsilon_i}{v_i \cdot (\varepsilon_i - 1)} \cdot (c_i + \Delta_i V_{\vec{n}}(t)), \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, I, \quad (2.3)$$

$$\text{und} \quad w_{\vec{n}}(t) = \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \cdot \sum_{i=1,\dots,I} \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_{\vec{n}}^{(i)}(t)^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}. \quad (2.4)$$

Die optimale Werberate ist eine Funktion der optimalen Preise, welche selbst Funktionen der Opportunitätskosten sind. Beachte, dass eine zulässige Lösung von (2.2) mit positiven Kontrollen die Beziehung $c_i + \Delta_i V_{\vec{n}}(t) > 0$, $1 \leq i \leq I$, vgl. (2.3), impliziert. Neben der

Herleitung der notwendigen Optimalitätsbedingungen werden auch die hinreichenden Bedingungen im Anhang untersucht. Tatsächlich liegt im Optimalpunkt ein Maximum vor. Aus den Bedingungen (2.3) und (2.4) leitet sich im Falle homogener Elastizitäten, d.h. $\varepsilon_i \equiv \varepsilon$, $1 \leq i \leq I$, die folgende Mehrproduktversion der dynamischen Dorfman-Steiner Identität ab, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq n_i \leq N_i$, $1 \leq i \leq I$, $\vec{n} := (n_1, \dots, n_I)$:

$$\frac{v_i \cdot p_{\vec{n}}^{(i)}(t) \cdot \lambda_{\vec{n}}^{(i)}(t)}{k(t) \cdot w_{\vec{n}}(t)} \stackrel{\varepsilon_i = \varepsilon}{=} \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{v_i \cdot p_{\vec{n}}^{(i)}(t)^{-\varepsilon+1} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)}}{\sum_{j=1, \dots, I} v_j \cdot p_{\vec{n}}^{(j)}(t)^{-\varepsilon+1} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(j)}}, \quad (2.5)$$

wobei $\lambda_{\vec{n}}^{(i)}(t) := \lambda_{\vec{n}}^{(i)}(t, p_{\vec{n}}^{(i)}(t), w_{\vec{n}}(t))$, $1 \leq i \leq I$, ist. Die Beziehung (2.5) drückt aus, dass das Verhältnis der i -ten optimalen Umsatzrate und der optimalen effektiven Werberate jeweils in einem bestimmten Verhältnis steht. Diese Verhältniszahlen basieren neben dem Quotient aus gemeinsamer Preiselastizität ε und der Werbeelastizität δ auf dem Ausdruck $v_i \cdot p_{\vec{n}}^{(i)}(t)^{-\varepsilon+1} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)}$. Für die Gesamtumsatzrate oder den Einproduktfall ergibt sich die Beziehung (1.5) in Kapitel 1.

Setzen wir die Optimalitätsbedingungen (2.3) und (2.4) in die Bellman-Gleichung (2.2) ein, so erhalten wir die folgende nichtlineare Differenzen-Differentialgleichung, $0 \leq t < T$, $\vec{0} < \vec{n} \leq \vec{N}$,

$$-\dot{V}_{\vec{n}}(t) + r(t) \cdot V_{\vec{n}}(t) + L_{\vec{n}} = k(t) \cdot \frac{1-\delta}{\delta} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot \left(\sum_{i=1, \dots, I} \frac{v_i^{\varepsilon_i}}{\varepsilon_i} \cdot \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i - 1} \right)^{-\varepsilon_i+1} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot (c_i + \Delta_i V_{\vec{n}}(t))^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}. \quad (2.6)$$

Die Herleitung der Gleichung ist im Anhang ausgeführt. Ziel ist es eine Lösung für die durch (2.6) und obige Randbedingungen beschriebene Wertefunktion zu konstruieren, um optimale Politiken für unser Ausgangsproblem, vgl. (2.1) zu bestimmen. Zur Rechtfertigung des beschriebenen Bellman Ansatzes sei auf Kapitel 1 sowie die klassischen Verifikationssätze, z.B. Brémaud (1980), Kapitel VII, C2, S.206, verwiesen. Auf dieser Basis werden wir im folgenden Abschnitt 3 Mehrproduktprobleme mit langlebigen Gütern lösen. Im 4. Abschnitt widmen wir uns spezifischen Problemvarianten mit verderblichen Gütern.

3 Lösung für Unendliche Horizonte

3.1 Mehrproduktfall mit langlebigen Gütern

In diesem Abschnitt wollen wir das in Abschnitt 2 beschriebene Mehrproduktproblem für unendliche Zeithorizonte lösen. Eine solche Verkaufssituation findet sich etwa bei Produktneueinführungen bzw. Marktsättigungsmodellen. Es wird davon ausgegangen, dass langfristig ein bestimmter Markt für jede Produktklasse i , $1 \leq i \leq I$, zu erobern ist bzw. eine bestimmte Zahl N_i von Artikeln ohne Zeitrestriktion verkauft werden kann. Bei derartigen im Marketing verbreiteten Problemstellungen wird dem Adoptionseffekt eine zentrale Rolle zugemessen, vgl. Bass (1969) oder Sethi (1973) für klassische deterministische Modelle.

Wir nehmen im Folgenden an, dass alle Modellparameter zeithomogen sind; d.h. wir verwenden die positiven Konstanten u , k und r . Die Stückkosten c_i können produktspezifisch

und die Lagerkostenrate $L_{\vec{n}}$ beliebig gewählt werden. Bei den Kosten c_i kann an Herstellungs- oder Förderungskosten aber auch Steuern oder Versandkosten gedacht werden. Als Spezialfall von (2.1) betrachten wir somit die Maximierung von

$$E \left[\int_0^{\tau} e^{-r \cdot t} \cdot \left(\sum_{i=1, \dots, I} \lambda_{\vec{Y}_t}^{(i)} \left(p_{\vec{Y}_t}^{(i)}(t), w_{\vec{Y}_t}(t) \right) \cdot \left(v_i \cdot p_{\vec{Y}_t}^{(i)}(t) - c_i \right) - L_{\vec{Y}_t} - k \cdot w_{\vec{Y}_t}(t) \right) dt \mid \vec{Y}_0 = \vec{N} \right]. \quad (3.1)$$

Im zeithomogenen Modell langlebiger Güter ist die Wertefunktion V keine Funktion der Zeit, und die assoziierte Bellman-Gleichung und die Optimalitätsbedingungen für die optimalen Kontrollen vereinfachen sich. Die einzige Randbedingung lautet $V_0 = 0$, und die in Analogie zu (2.6) zu lösende Differenzengleichung lautet im Falle langlebiger Güter mit $c_i \geq 0$, $\varepsilon_i > 1$, $1 \leq i \leq I$, und $L_{\vec{n}} \geq 0$

$$r \cdot V_{\vec{n}} + L_{\vec{n}} = \left(\sum_{i=1, \dots, I} (\eta_i / \gamma_i)^{1-\delta} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot v_i^{\varepsilon_i} \cdot (c_i + \Delta_i V_{\vec{n}})^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}, \quad (3.2)$$

wobei wir zur kompakteren Schreibweise die Hilfsparameter $\gamma_i := (\varepsilon_i - \delta) / (1 - \delta)$ und $\eta_i := k \cdot (\varepsilon_i - \delta) / \delta \cdot \left(u \cdot \delta / (k \cdot \varepsilon_i) \cdot (\varepsilon_i / (\varepsilon_i - 1))^{-\varepsilon_i+1} \right)^{1/(1-\delta)}$, $1 \leq i \leq I$, verwenden, vgl. Kapitel 1.

Der in diesem Modell maßgebende Bestandseinfluss hängt von den individuellen Stückkosten \vec{c} der verschiedenen Produkte ab. Durch die vorausgesetzte Positivität zulässiger Preise, vgl. (2.3), können wir annehmen, dass die Summe aus Stückkosten und Opportunitätskosten einer optimalen Lösung positiv ist, d.h. $c_i + \Delta_i V_{\vec{n}} > 0$ gilt. Für jeden Wert $\xi_i = 1_{\{n_i > 0\}} \cdot V_{(n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots, n_I)} \in \mathbb{R}$, $0 \leq n_i \leq N_i$, $1 \leq i \leq I$, folgt die Beziehung $V_{\vec{n}} > \xi_i - c_i$, $1 \leq i \leq I$. Das bedeutet, dass im Falle positiver Lagerkosten die Wertefunktion auch negative Werte annehmen kann. Des Weiteren sind die Werte $V_{\vec{n}}$ für gegebene ξ_i , $1 \leq i \leq I$, eindeutig durch die Beziehung (3.2) beschrieben, da die linke Seite der Gleichung (3.2) streng monoton in $V_{\vec{n}}$ steigt und die rechte Seite streng monoton in $V_{\vec{n}}$ fällt. Wenn also eine Lösung für V existiert, dann ist sie eindeutig beschrieben durch (3.2).

Im Folgenden wollen wir ein rekursives Verfahren vorstellen, um die Wertefunktion zu berechnen. Aus den Randbedingungen ergibt sich direkt $V_0 = 0$. Ausgehend von diesem Startwert sind die Werte für $V_{\vec{n}}$ implizit determiniert und lassen sich in der folgenden Reihenfolge berechnen. In einem ersten Schritt sind alle $V_{(n_1, \dots, n_I)}$ für die Zustände \vec{n} mit einem letzten Artikel, d.h. $\sum_i n_i = 1$, zu bestimmen. Im zweiten Schritt betrachten wir sämtliche Zustände \vec{n} mit genau zwei verbleibenden Artikeln, d.h. $\sum_i n_i = 2$ und berechnen die verschiedenen Werte $V_{\vec{n}}$ mittels Gleichung (3.2). Abbildung 1 illustriert diese Vorgehensweise für den Fall zweier Produkte.

Die nächsten Schritte behandeln die Fälle $\sum_i n_i = 3, 4, \dots, \sum_i N_i$ in aufsteigender Reihenfolge. Das Verfahren endet mit der Bestimmung der Zahl $V_{\vec{N}}$, und die Berechnung der Wertefunktion ist vollständig. Beachte, dass die in den Opportunitätskosten auftretenden Werte $1_{\{n_i > 0\}} \cdot V_{(n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots, n_I)}$ jeweils im vorherigen Schritt berechnet wurden.

$n_1 \setminus n_2$	0	1	2	3	...	N_2
0	$V_{0,0}$	$V_{0,1}$	$V_{0,2}$	$V_{0,3}$	→	
1	$V_{1,0}$	$V_{1,1}$	$V_{1,2}$	↓		
2	$V_{2,0}$	$V_{2,1}$	↓	→		
3	$V_{3,0}$	↓	→	↓		
⋮	↓					
N_1						

Abbildung 1. Rekursives Berechnungsschema im Fall von zwei Produkten

Ohne die Berücksichtigung von Lagerkosten, d.h. $L=0$, ist die Wertefunktion stets nichtnegativ, da bereits die suboptimale Politik $p_i = c_i / v_i$ und $w=0$ eine Gewinnerwartung von null liefert. Sind die Lagerkosten also hinreichend klein, so existiert eine nichtnegative Lösung der Wertefunktion. Allgemein gilt $V_{\bar{n}} \geq \sum_i -n_i \cdot c_i$, vgl. Abverkauf mit $p_i, w \rightarrow 0$ (z.B. im Falle großer Lagerkosten).

Theorem 3.1. Wenn das Problem (3.1) eine Lösung hat, so ist die assoziierte Wertefunktion $V_{\bar{n}}$ durch (3.2) eindeutig bestimmt und kann rekursiv berechnet werden. Die optimalen Kontrollen sind zeitunabhängig und gegeben durch, $0 < n_i \leq N_i$, $1 \leq i \leq I$ bzw. $0 < \bar{n} \leq \bar{N}$,

$$p_{\bar{n}}^{(i)} = \frac{\varepsilon_i}{v_i \cdot (\varepsilon_i - 1)} \cdot (c_i + \Delta_i V_{\bar{n}}) \quad \text{und} \quad w_{\bar{n}} = \left(\frac{u \cdot \delta}{k} \cdot \sum_{i=1, \dots, I} \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot p_{\bar{n}}^{(i) - \varepsilon_i + 1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}};$$

$$\chi_{\bar{n}}^{(i)} = u^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{\delta}{k} \cdot \sum_{j=1, \dots, I} \frac{v_j}{\varepsilon_j} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(j)} \cdot \left(\frac{\varepsilon_j \cdot (c_j + \Delta_j V_{\bar{n}})}{v_j \cdot (\varepsilon_j - 1)} \right)^{-\varepsilon_j + 1} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot \left(\frac{\varepsilon_i \cdot (c_i + \Delta_i V_{\bar{n}})}{v_i \cdot (\varepsilon_i - 1)} \right)^{-\varepsilon_i}. \quad (3.3)$$

Beweis. Herleitung siehe oben.

Wir betrachten abschließend ein Beispiel mit zwei Produkten und den Anfangsbeständen von 20 bzw. 25 Artikeln. Die spezifische Wahl der verschiedenen Modellparameter beinhaltet asymmetrische Stück- und Lagerkosten sowie nichttriviale Adoptionseffekte. Abb. 2 zeigt die Wertefunktion, d.h. den Barwert der erwarteten zukünftigen Gewinne für alle Restbestandskombinationen der beiden verschiedenen Produkte.

Es ist zu beobachten, dass die Wertefunktion in diesem Beispiel konvex in beiden Lagerbeständen ist. Durch die Lagerkosten fallen die erwarteten Gewinne für hohe Restbestände, und es gibt eine optimale Bestandskombination, welche die größten Gewinne erwarten lässt. Die Modelllösung ermöglicht somit die Planung optimaler Anfangsbestände/Bestellmengen; eventuelle Bestell- bzw. Einkaufskosten können dabei mit den zu erwartenden Gewinnen ins Verhältnis gesetzt werden.

Durch die systematische Variation der verschiedenen Modellparameter kann die Wirkung einzelner Parameter erfasst und mittels Simulationsstudien genauer analysiert werden. Letztere können durch die Zeitunabhängigkeit der optimalen Politiken besonders einfach erstellt werden, s. Abschnitt 3.2.

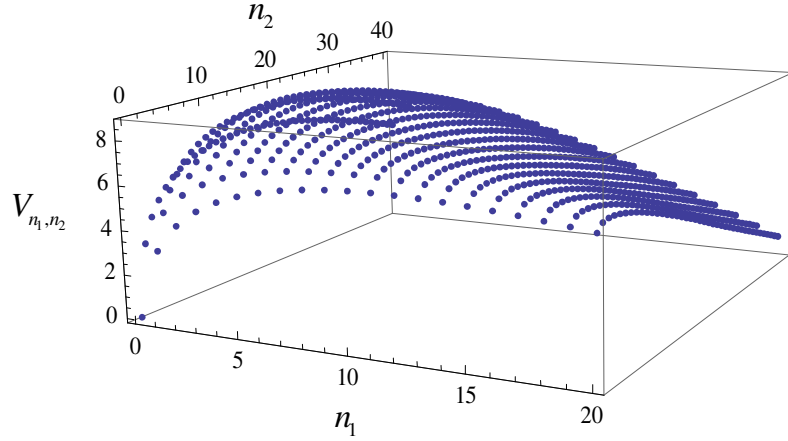


Abbildung 2. Darstellung erwarteter Gewinne für verschiedene Lagerbestände ($I=2$, $T = \infty$)

$$N_1=20, N_2=25, \varepsilon_1=1.8, \varepsilon_2=2, c_1=0.6, c_2=0.5, L_{n_1, n_2} = 0.1 \cdot n_1 + 0.05 \cdot n_2$$

$$\chi_{n_1, n_2}^{(1)} = (1+n_1)^{-0.8} + (1+n_2)^{-0.9}, \chi_{n_1, n_2}^{(2)} = 1, v_1 = v_2 = u = 1, \delta=0.2, r=0.2$$

Das am Beispiel der isoelastischen Nachfrage vorgestellte Rekursionsverfahren lässt sich im Rahmen des betrachteten zeithomogenen Modells mit unendlichem Zeithorizont auch auf andere Verkaufsraten anwenden. Für die Konstruktion der Lösung war nicht die Struktur der Verkaufsraten entscheidend. Voraussetzung ist, dass sich aus der Bellman-Gleichung mit Hilfe der Optimalitätsbedingungen eine entsprechende Differenzengleichung ableiten lässt. Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen kann analog mit ähnlichen Monotonieargumentationen nachgewiesen werden.

3.2 Auswertung und Simulation

In diesem Abschnitt illustrieren wir u.a., wie sich Realisationen (optimal) gesteuerter Bestandstrajektorien in stetiger Zeit effizient simulieren lassen. Auf Basis simulierter Verkaufszeitpunkte für die verschiedenen Produktklassen lassen sich die korrespondierenden Gewinne, bzw. Umsätze, Produktionskosten und Gesamtwerbeausgaben exakt berechnen.

Proposition 3.1. Seien die (nicht notwendiger Weise optimalen) Verkaufsraten gegeben durch $\lambda_{\vec{y}}^{(i)}$, $1 \leq i \leq I$, und sei $\lambda_{\vec{y}} := \sum_i \lambda_{\vec{y}}^{(i)}$. Bezeichne nun $\tau_{\vec{m}}$ den Anfangs- und $\tau_{\vec{m}}^{(+)}$ den (zufälligen) Endzeitpunkt des Zeitraums in dem sich das System im Zustand \vec{m} , $\vec{0} \leq \vec{m} \leq \vec{N}$, befindet.

- (i) Sei $(U_{\vec{y}})_{\vec{0} < \vec{y} \leq \vec{N}}$ eine Familie unabhängiger identisch gleichverteilter Zufallsvariablen auf dem Einheitsintervall $[0,1]$. Ausgehend von $\tau_{\vec{N}} = 0$ definieren wir $(\tau_{\vec{y}})_{\vec{0} \leq \vec{y} \leq \vec{N}}$ rekursiv: für alle gegebenen Zustände \vec{m} mit Anfangszeitpunkt $\tau_{\vec{m}}$ ist der Zeitpunkt $\tau_{\vec{m}}^{(+)}$ beschrieben durch

$$\tau_{\vec{m}}^{(+)} := \tau_{\vec{m}} + \ln \left(U_{\vec{m}}^{-\lambda_{\vec{m}}} \right). \quad (3.4)$$

- (ii) Sei h_i der i -te Einheitsvektor im I -dimensionalen Raum und bezeichne $\pi_{\vec{m}}^{(i)} := P[\vec{m} \rightarrow \vec{m} - h^{(i)}] = P[\tau_{\vec{m}}^{(+)} = \tau_{\vec{m}-h^{(i)}}]$ die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende von Zustand \vec{m} , d.h. im Zeitpunkt $\tau_{\vec{m}}^{(+)}$, der realisierte Verkauf vom Produkttyp i , $i=1, \dots, I$, ist. Für alle Zustände $\vec{0} < \vec{y} \leq \vec{N}$, und gegebene unabhängige Sprungraten $\lambda_{\vec{y}}^{(i)}$ der Produkte i in \vec{y} gilt

$$\pi_{\vec{y}}^{(i)} := \lambda_{\vec{y}}^{(i)} / \sum_{j=1, \dots, I} \lambda_{\vec{y}}^{(j)}. \quad (3.5)$$

Sei $(\tilde{\tau}_{\vec{y}}^{(+)})_{\vec{0} < \vec{y} \leq \vec{N}}$ der zufällige Zeitpunkt im Zustand \vec{y} in dem ein Verkauf stattfindet und sei die zufällige Entwicklung der Zustandsübergänge beschrieben durch (3.5), dann folgt unter der Annahme, dass $\tilde{\tau}_{\vec{0}} < \infty$ fast sicher, dass die gemeinsame Verteilung der Folgen $(\tau_{\vec{y}})_{\vec{y}}$ und $(\tilde{\tau}_{\vec{y}})_{\vec{y}}$ identisch ist.

- (iii) Vermöge (i)-(ii) lassen sich Abverkaufsprozesse durch Realisierungen der Zeitpunkte $\tau_{\vec{m}}$ bzw. der jeweiligen Folgezustände simulieren. Auf dieser Basis können für alle Produktklassen die korrespondierenden bis zum Zeitpunkt t kumulierten Umsätze $U^{(i)}(t)$ und Produktionskosten $C^{(i)}(t)$ sowie die Werbekosten $W(t)$ ausgewertet werden, $1 \leq i \leq I$:

$$U^{(i)}(t) = \sum_{\substack{\text{alle } \tau_{\vec{m}} \leq t, \\ \tau_{\vec{m}} \text{ Verkauf vom Typ } i}} e^{-r \cdot \tau_{\vec{m}}} \cdot v^{(i)} \cdot p_{\vec{m}-h^{(i)}}^{(i)}, \quad C^{(i)}(t) = \sum_{\substack{\text{alle } \tau_{\vec{m}} \leq t, \\ \tau_{\vec{m}} \text{ Verkauf vom Typ } i}} e^{-r \cdot \tau_{\vec{m}}} \cdot c^{(i)},$$

$$W(t) := \sum_{\substack{\text{alle } \tau_{\vec{m}} \leq t, \ 1 \leq i \leq I, \\ \tau_{\vec{m}} \text{ Verkauf vom Typ } i}} \int_{\tau_{\vec{m}}}^{\min(\tau_{\vec{m}}^+, t)} e^{-r \cdot s} \cdot k \cdot w_{\vec{m}-h^{(i)}} ds = \sum_{\substack{\text{alle } \tau_{\vec{m}} \leq t, \ 1 \leq i \leq I, \\ \tau_{\vec{m}} \text{ Verkauf vom Typ } i}} \frac{k}{r} \cdot w_{\vec{m}-h^{(i)}} \cdot \left(e^{-r \cdot \min(\tau_{\vec{m}}^+, t)} - e^{-r \cdot \tau_{\vec{m}}} \right);$$

die kumulierten Gewinne sind, $0 \leq t \leq T$,

$$G(t) := \sum_{i=1}^I (U^{(i)}(t) - C^{(i)}(t)) - W(t).$$

Beweis: Siehe Anhang.

Das Verfahren basiert auf exponentialverteilten Wartezeiten zwischen zwei Verkaufszeitpunkten, wobei sich die Gesamtverkaufsrate aus der Summe von I zeithomogenen, zustandsabhängigen Poissonraten der einzelnen Produkte zusammensetzt. Die Bestimmung der realisierten Umsatz- und Kostenprozesse $U^{(i)}$ bzw. $C^{(i)}$ und W ergibt sich aus der jeweiligen natürlichen Definition. Durch die Rekursion (3.4) kombiniert mit der Simulation der Übergangswahrscheinlichkeiten, vgl. (3.5), kann zudem leicht eine Vielzahl von Verkaufstrajektorien erstellt werden. Dadurch können beispielsweise mittlere Bestands- und Preistrajektorien sowie Gewinnentwicklungen aber auch Gesamtgewinnverteilungen, vgl. $G(T)$, approximiert und studiert werden. Die Wirkungsweise verschiedener Modellparameter kann durch deren Variation in ähnlicher Weise mit Simulationsstudien untersucht werden.

Eine andere Form der Auswertung der zu erwartenden Verkaufsergebnisse ist die Bestimmung von Zustandswahrscheinlichkeiten. Diese geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich der (optimal) gesteuerte Verkaufsprozess zu einem Zeitpunkt t in einem bestimmten Zustand befindet. Das folgende Lemma gibt an wie derartige Zustandswahrscheinlichkeiten für das vorgestellte Modell allgemein berechnet werden können.

Lemma 3.1. Sei die Verkaufsrate für Produkt i gleich $\lambda_{\vec{y}}^{(i)}$, $i=1,\dots,I$. Dann erfüllen die Zustandswahrscheinlichkeiten $q(t, \vec{y}) = P[\vec{Y}_t = \vec{y}]$ ausgehend von $q(t, \vec{N}) = e^{-\lambda_{\vec{N}} \cdot t}$, die Rekursion, $0 \leq t$, $\vec{0} \leq \vec{y} < \vec{N}$,

$$q(t, \vec{y}) = \sum_{i=1,\dots,I} \left(e^{-\lambda_{\vec{y}}^{(i)} \cdot t} \cdot \lambda_{\vec{y}+h_i}^{(i)} \cdot \int_0^t e^{\lambda_{\vec{y}}^{(i)} \cdot s} \cdot q(s, \vec{y}+h_i) \, ds \right),$$

wobei h_i der i -te Einheitsvektor ist.

Beweis: Siehe Anhang.

Mit Hilfe der Zustandswahrscheinlichkeiten lässt sich neben der erwarteten Entwicklung der einzelnen Restbestände auch die erwartete Evolution der Angebotspreise der verschiedenen Produkte untersuchen.

3.3 Der Einproduktfall mit Stück- und Lagerkosten

Als eine direkte Implikation der Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte erhalten wir als Erweiterung von Kapitel 1 auch die Lösung des Einproduktmodells unter Einbeziehung von Produktions- und Lagerkosten sowie beliebigen Adoptionseffekten. Am Beispiel des stochastischen isoelastischen Modells halten wir diesen Fakt in der folgenden Proposition fest.

Proposition 3.2. Sei $T = \infty$, $I = 1$, $r > 0$, $u > 0$, $\varepsilon > 1$, $\chi_n > 1$ und $c, L_n \geq 0$. Hat das assoziierte Problem eine Lösung, so ist die Wertefunktion V_n eindeutig und erfüllt die Rekursion, $1 \leq n \leq N$,

$$r \cdot V_n + L_n = \frac{\eta}{\gamma} \cdot \left(\chi_n \cdot v^\varepsilon \cdot (c + V_n - V_{n-1})^{-\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}, \quad \text{wobei } V_0 := 0. \quad (3.6)$$

Die optimalen Kontrollen sind gegeben durch, $1 \leq n \leq N$,

$$p_n = \frac{\varepsilon}{v \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot (c + \Delta V_n) \quad \text{und} \quad w_n = \left(\frac{u \cdot \delta}{k \cdot \varepsilon} \cdot \chi_n \cdot v \cdot p_n^{-\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}.$$

Beweis: Die Differenzengleichung (3.6) ist ein Spezialfall von (3.2) und kann mittels des beschriebenen Verfahrens rekursiv gelöst werden, vgl. Theorem 3.1.

Die Auswirkungen verschiedener Adoptionsfunktionen im Einproduktfall wurde im deterministischen Kontext bereits in Kapitel 2, Helmes, Schlosser, Weber (2013), untersucht. Im folgenden Beispiel konzentrieren wir uns daher auf die Untersuchung der simultanen Abhängigkeit von Stück- und Lagerkosten ohne die Berücksichtigung von Adoptionseffekten.

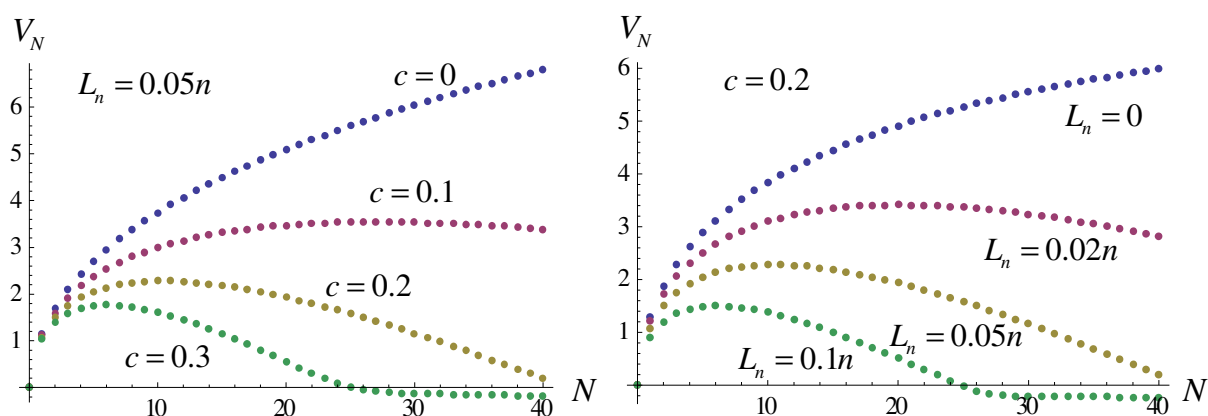


Abbildung 3. Erwartete Gewinne für verschiedene Stückkosten $c=(0,0.1,0.2,0.3)$, $L_n = 0.05n$ und verschiedene Lagerkostenraten $L_n / n =(0, 0.02, 0.05, 0.1)$, $c=0.2$ ($T = \infty$, $N=1,\dots,40$, $r=0.1$, $\varepsilon=2$, $\delta =0.2$, $v=k=1$, $\chi_n=1$)

Im Falle der Lagerkostenrate $L_n = 0.05n$ zeigt Abb. 3a die erwarteten Gewinne für verschiedene Lagerbestände von 0 bis 40 und vier unterschiedliche Stückkosten, d.h. $c=(0, 0.1, 0.2, 0.3)$. Erwartungsgemäß fallen die erwarteten Gewinne in c für alle Restbestände. Für alle c steigt die Wertfunktion im Bestand auf ein Maximum und fällt danach. Dieses unimodale Verhalten wird durch positive Lagerkosten verursacht. Der optimale Lagerbestand fällt mit höheren Produktionskosten.

Für feste Stückkosten $c = 0.2$ illustriert Abb. 3b die Abhängigkeit der Wertfunktion von den Lagerkosten, d.h. $L_n / n =(0, 0.02, 0.05, 0.1)$. Im Fall ohne Lagerkosten steigen die erwarteten Gewinne konvex im Lagerbestand. In allen Fällen mit positiven Lagerkosten zeigt sich wieder das oben beschriebene unimodale Verhalten. Die optimalen Bestände – für die die Wertfunktion maximal wird – fallen in den Lagerkosten pro Einheit.

4 Lösung für Endliche Horizonte

4.1 Mehrproduktfall mit verderblichen Gütern

Wir betrachten nun den monopolistischen Mehrproduktverkauf von verderblichen Gütern über den endlichen Zeithorizont T . In diesem Abschnitt nehmen wir speziell an, dass keine Lagerkosten und keine Produktionskosten zu berücksichtigen sind, d.h. $L_n = 0$ und $c_i = 0$, $1 \leq i \leq I$, gilt. In spezifischen Anwendungen, etwa dem Verkauf von Früchten o.Ä., sind Lagerkosten für den begrenzten Verkaufszeitraum oft im Voraus zu bezahlen und hängen somit nicht von der zufälligen Verkaufsentwicklung ab. Sind die Artikel bereits verkaufsfertig, so ist die Annahme, dass beim Verkauf keine Kosten entstehen, ebenfalls gerechtfertigt. Die Möglichkeit der Nachbestellung wird nicht betrachtet.

Des Weiteren nehmen wir an, dass die Preiselastizitäten der verschiedenen Produkte identisch sind und $\varepsilon_i = \varepsilon$, $1 \leq i \leq I$, gilt. Sind die verschiedenen Produkte ähnlich (Sorten von Früchten, Blumen, etc.), so kann davon ausgegangen werden, dass die Preiselastizitäten der Nachfrage vergleichbar sind. Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir in Anlehnung an (2.1) die Maximierung von

$$E \left[\int_0^{\tau \wedge T} e^{-R(t)} \cdot \left(\sum_{i=1, \dots, I} u(t) \cdot w_{\bar{Y}_i}(t)^\delta \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot p_{\bar{Y}_i}^{(i)}(t)^{-\varepsilon} \cdot \left(v_i \cdot p_{\bar{Y}_i}^{(i)}(t) \right) - k(t) \cdot w_{\bar{Y}_i}(t) \right) dt \mid \bar{Y}_0 = \bar{N} \right]. \quad (4.1)$$

Das stochastische Mehrproduktproblem mit endlichem Horizont ist durch die folgenden zeitinhomogenen Größen gekennzeichnet: Ankunftsintensität $u(t)$, Werbekostenparameter $k(t)$ und Diskontierungsrate $r(t)$. Die dem Steuerungsproblem zugeordnete Differenzen-Differentialgleichung, vgl. Abschnitt 2, geht als Spezialfall aus (2.6) hervor und lautet

$$-\dot{V}_{\bar{n}}(t) + r(t) \cdot V_{\bar{n}}(t) = \underbrace{\gamma^{-1} \cdot k(t) \cdot \frac{\varepsilon - \delta}{\delta} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right)^{-\varepsilon + 1} \right)^{\frac{1}{1 - \delta}}}_{=: \eta(t)} \cdot \left(\sum_{i=1, \dots, I} \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot v_i^\varepsilon \cdot \Delta_i V_{\bar{n}}(t)^{-\varepsilon + 1} \right)^{\frac{1}{1 - \delta}}. \quad (4.2)$$

Die Randbedingungen sind $V_0(t) = 0$ für alle $0 \leq t \leq T$ und $V_{\bar{n}}(T) = 0$ für alle $0 \leq n_i \leq N_i$, $1 \leq i \leq I$. Im Folgenden verwenden wir den Parameter $\gamma := (\varepsilon - \delta)/(1 - \delta)$, vgl. Abschnitt 3, und die nun zeitabhängige Funktion $\eta(t) := \eta(t; u, k, \delta, \varepsilon)$, vgl. (4.2). Um die Differenzen-Differentialgleichung (4.2) mit den obigen Randbedingungen zu lösen, nutzen wir in Anlehnung an Kapitel 1 den folgenden separablen Ansatz für die Wertefunktion:

$$V_{\bar{n}}(t) := \alpha(t) \cdot \beta_{\bar{n}}. \quad (4.3)$$

Während die Funktion $\alpha(t)$, $0 \leq t \leq T$, die Zeitabhängigkeit der Wertefunktion ausdrückt, beschreibt der Ausdruck $\beta_{\bar{n}}$, $\vec{0} \leq \bar{n} \leq \vec{N}$, den Einfluss des Zustandes bzw. der Marktsättigung. Der Ansatz (4.3) impliziert, dass die Opportunitätskosten als $\Delta_i V_{\bar{n}}(t) := \alpha(t) \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}}$ geschrieben werden können, wobei $\Delta_i \beta_{\bar{n}} := \beta_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_I} - 1_{\{n_i > 0\}} \cdot \beta_{n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots, n_I}$ für alle \bar{n} , d.h. $0 < n_i \leq N_i$, $1 \leq i \leq I$, ist. Mit (4.3) ergibt sich aus Gleichung (4.2)

$$-\dot{\alpha}(t) + r(t) \cdot \alpha(t) = \frac{\eta(t)}{\gamma} \cdot \alpha(t)^{\frac{-\varepsilon + 1}{1 - \delta}} \cdot \beta_{\bar{n}}^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1, \dots, I} \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot v_i^\varepsilon \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}}^{-\varepsilon + 1} \right)^{\frac{1}{1 - \delta}}. \quad (4.4)$$

Die Struktur von (4.4) offenbart bereits, wie sich die Lösung für V konstruieren lässt. Wir werden die Werte $\beta_{\bar{n}}$ so wählen, dass die auf der rechten Seite von (4.4) gesammelten bestandsabhängigen Terme identisch mit 1 sind und (4.4) in die Bernoulli Differentialgleichung

$$-\dot{\alpha}(t) + r(t) \cdot \alpha(t) = \eta(t) / \gamma \cdot \alpha(t)^{1 - \gamma}, \quad (4.5)$$

übergeht. Mit der Randbedingung $V_{\vec{n}}(T) = 0$ folgt $\alpha(T) = 0$, und die Zeitfunktion $\alpha(t)$ ist durch die eindeutige Lösung von (4.5) bestimmt, vgl. auch Kapitel 2. Wir erhalten somit

$$\alpha(t) := A(t)^{1/\gamma}, \quad \text{wobei} \quad A(t) := e^{-\gamma R(t)} \cdot \int_t^T e^{\gamma R(s)} \cdot \eta(s) ds. \quad (4.6)$$

Als zweiter Teil unserer Lösungskonstruktion sind die zustandsabhängigen Werte $(\beta_{\vec{n}}) = (\beta_{n_1, n_2, \dots, n_I})_{n_i \geq 0}$ zu bestimmen, welche für alle \vec{n} die Bedingung

$$\sum_{i=1, \dots, I} \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot v_i^\varepsilon \cdot (\Delta_i \beta_{\vec{n}})^{-\varepsilon+1} = \beta_{\vec{n}}^{1-\delta} \quad (4.7)$$

erfüllen, vgl. (4.4). Analog zum vorgestellten Berechnungsschema der bestandsabhängigen Wertefunktion in Abschnitt 3 können die implizit definierten Werte $\beta_{\vec{n}}$ ebenfalls rekursiv berechnet werden. Wieder kann von $\beta_0 = 0$ ausgegangen werden, um die $\beta_{\vec{n}}$ Werte für alle \vec{n} mit $\sum_i n_i = j$ aufsteigend für alle j von 1 bis $\sum_i N_i$ rekursiv zu ermitteln.

Darüber hinaus ist die Lösung eindeutig, und die Existenz ist stets gesichert. Der Nachweis basiert auf der gleichen Argumentation, vgl. Abschnitt 3. Die linke (rechte) Seite von Gleichung (4.7) ist monoton fallend (steigend) in $\beta_{\vec{n}}$. Dadurch ist $\beta_{\vec{n}}$ eindeutig bestimmt, vgl. (3.2). Darüber hinaus, können wir davon ausgehen, dass die Beziehung $\beta_{(n_1, \dots, n_i, \dots, n_I)} > \beta_{(n_1, \dots, n_i-1, \dots, n_I)}$, für alle $1 \leq i \leq I$ gilt, da im Falle ohne Lagerkosten ein höherer Lagerbestand stets höhere Gewinne erwarten lässt, vgl. (4.3). Ist also $\Delta_i \beta_{\vec{n}}, 1 \leq i \leq I$, positiv, so folgt aus (4.7), dass für alle \vec{n} ein positiver Wert $\beta_{\vec{n}}$ existiert.

Im Sonderfall ohne endogene Werbung, d.h. $\delta = 0$, und keinem cross-referentiellen Adoptionseffekt, d.h. wenn $\chi_{\vec{n}}^{(i)} = \tilde{\chi}_{n_i}^{(i)}$ nur von n_i abhängt, $1 \leq i \leq I$, „zerfällt“ die Konstruktionsbedingung in I separable Teilfolgen $\beta_{n_i}^{(i)}$, und es gilt $\beta_{\vec{n}} = \sum_{i=1, \dots, I} \beta_{n_i}^{(i)}$, wobei $\beta_{n_i}^{(i)}$ bestimmt ist durch, $1 \leq i \leq I$, $\beta_0^{(i)} = 0$,

$$\beta_{n_i}^{(i)} = \tilde{\chi}_{n_i}^{(i)} \cdot v_i^\varepsilon \cdot \left(\beta_{n_i}^{(i)} - 1_{\{n_i > 0\}} \cdot \beta_{n_i-1}^{(i)} \right)^{-\varepsilon+1}. \quad (4.8)$$

Beachte, dass die implizite Definition dieser Teilfolgen, vgl. (4.8), im Falle ohne Adoptionseffekt, d.h. $\tilde{\chi}_{n_i}^{(i)} = 1$, mit der Berechnung der Bestandsabhängigkeit im Einproduktfall, siehe Kapitel 1, korrespondiert.

Festzuhalten bleibt, dass wir durch die Bestimmung des Zeit- und Bestandseinflusses, vgl. (4.6) und (4.7), eine (eindeutige) Lösung der Wertefunktion konstruiert haben. Mit Hilfe der Optimalitätsbedingung für die verschiedenen Preise und die übergreifende Shop-Werbung lassen sich die optimalen feedback Kontrollen in expliziter Form angeben. Die entsprechenden Ergebnisse sind im nachfolgenden Theorem zusammengefasst. Im Gegensatz zu Theorem 3.1 ist hierbei keine Existenzvoraussetzung notwendig.

Theorem 4.1. Sei $\lambda_{\vec{n}}^{(i)}(t, p_i, w) := u(t) \cdot w^\delta \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 1$ und $L_{\vec{n}} = c_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, I$. Dann gilt für alle $\vec{0} < \vec{n} \leq \vec{N}$, $0 \leq t < T$:

erwartete Gewinne

$$V_{\vec{n}}(t) := A(t)^{1/\gamma} \cdot \beta_{\vec{n}}$$

optimale Preise

$$p_{\vec{n}}^{(i)}(t) = \frac{\varepsilon}{v_i \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot \Delta_i V_{\vec{n}}(t) = \frac{\varepsilon}{v_i \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot A(t)^{1/\gamma} \cdot \Delta_i \beta_{\vec{n}}$$

optimale Werberaten

$$w_{\vec{n}}(t) = \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{i=1, \dots, I} \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot v_i \cdot p_{\vec{n}}^{(i)}(t)^{-\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}$$

optimale Verkaufsraten

$$\lambda_{\vec{n}}^{(i)}(t) = \frac{\eta(t)}{A(t)} \cdot b_i(\vec{n}), \text{ wobei } b_i(\vec{n}) := \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - \delta} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot v_i^\varepsilon \cdot (\Delta_i \beta_{\vec{n}})^{-\varepsilon} \cdot \beta_{\vec{n}}^\delta.$$

Beweis. Siehe Anhang.

Für ein spezifisches numerisches Beispiel mit zwei Produktklassen, wobei etwa an zwei Sorten von Früchten gedacht werden kann, illustriert Abb. 4a die Lösung des Bestandseffektes $\beta_{\vec{n}} = \beta_{n_1, n_2}$. Es zeigt sich, dass $\beta_{\vec{n}}$ hierbei konkav in beiden Komponenten steigt. Diese Beobachtung korrespondiert mit einem abnehmenden Grenznutzen bei zunehmendem Bestand innerhalb einer Produktklasse. Darüber hinaus lässt sich jedoch auch eine Konkavität bei der Betrachtung der Gesamt Artikel beobachten. Der Wertzuwachs bei der Erhöhung jeder Produktklasse um einen Artikel ist geringer als die Summe der Wertzuwächse bei Erhöhung nur einer Produktklasse um einen Artikel, d.h. $\beta_{n_1, n_2} - \beta_{n_1-1, n_2-1} \leq (\beta_{n_1, n_2} - \beta_{n_1-1, n_2}) + (\beta_{n_1, n_2} - \beta_{n_1, n_2-1})$.

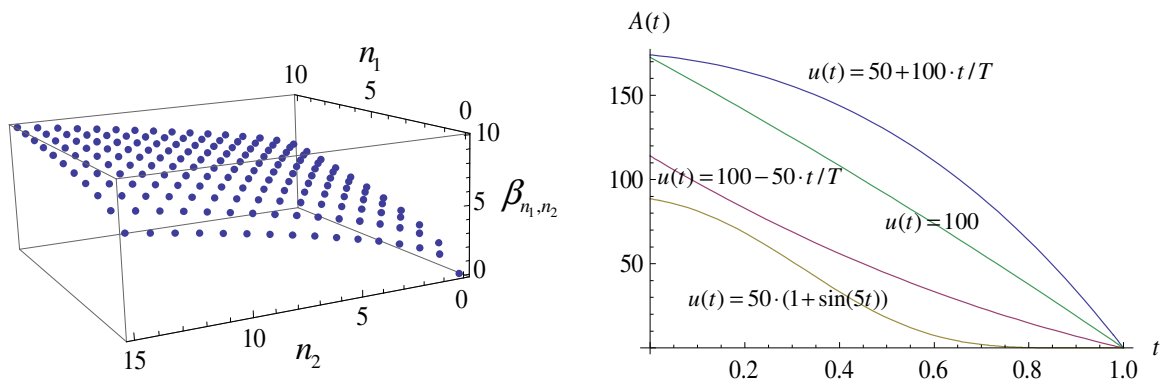


Abbildung 4. Bestandseinfluss (links) und Zeiteinfluss (rechts) für verschiedene $u(t)$

$$T=1, r=0, I=2, N_1=10, N_2=15, \chi_{\vec{n}}^{(1)} = 0.5 \cdot n_1 + n_2^{0.4}, \chi_{\vec{n}}^{(2)} = 2, \\ \delta=0.2, \varepsilon=2, v_1 = v_2 = 1$$

In Abb. 4b ist der Zeiteinfluss anhand der Funktion $A(t)$ für vier verschiedene Ankunftsrate $u(t)$ dargestellt. Dabei wurde der Zeithorizont $T=1$ und keine Diskontierung angenommen. Die verschiedenen Ankunftsrate haben konstanten, fallenden, steigenden und steigend/fallenden Charakter. In allen Szenarien fällt die Funktion $A(t)$ in der Zeit und erreicht 0 im Endzeitpunkt T .

Im zeithomogenen Fall ist der Zeiteinfluss der Wertefunktion linear; die anderen Fälle zeigen, dass auch konkave oder konvexe Verläufe der als Nachfragepotential zu interpretierenden Funktion $A(t)$ möglich sind.

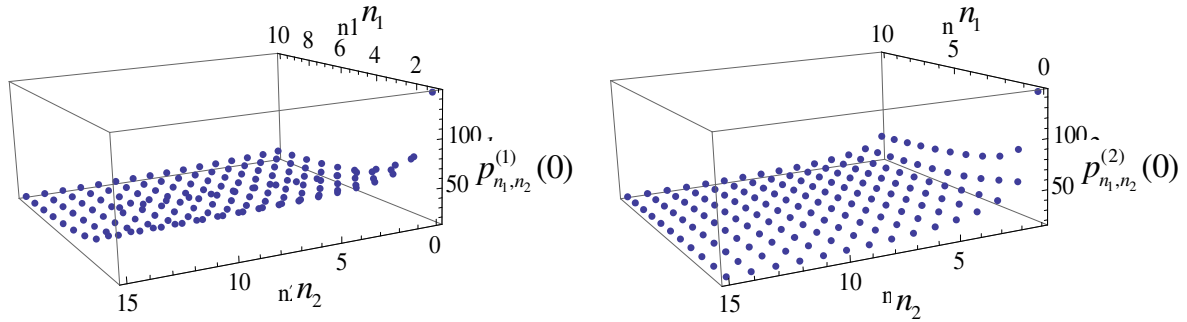


Abbildung 5. Optimale Preispolitik für Produkt 1 (links) und 2 (rechts) im Anfangszeitpunkt;
 $T=1, r=0, I=2, N_1=10, N_2=15, \chi_n^{(1)} = 0.5 \cdot n_1 + n_2^{0.4}, \chi_n^{(2)} = 2, \delta=0.2, \varepsilon=2,$
 $v_1 = v_2 = 1$

Für den Fall $u(t) = 50 + 100 \cdot t/T$, $r=0.1$, $T=1$ illustriert Abb. 5 die optimalen bestandsabhängigen Preise für die beiden Produkte im Startzeitpunkt $t=0$. Dabei ist der Bestand durch den Restbestand n_1 und n_2 von Produkt 1 bzw. 2 beschrieben. Beide Preise fallen konvex in den Restbeständen n_1 und n_2 . Für andere Adoptionseffekte sind aber auch andere Verläufe möglich. In den übrigen Zeitpunkten $t > 0$ sind die Preise (proportional) kleiner aber strukturell identisch, vgl. Formel für die optimalen Preisen $\bar{p}_n(t)$ in Theorem 4.1.

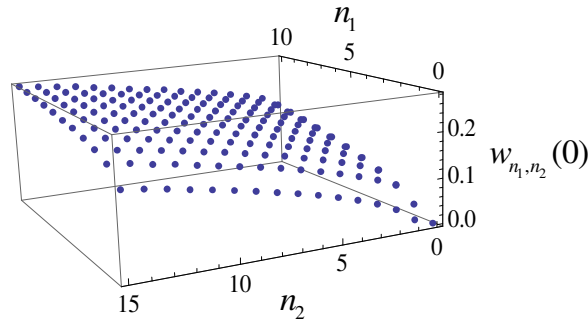


Abbildung 6. Optimale Werbepolitik im Anfangszeitpunkt $t=0$;
 $T=1, r=0, I=2, N_1=10, N_2=15, \chi_n^{(1)} = 0.5 \cdot n_1 + n_2^{0.4}, \chi_n^{(2)} = 2,$
 $\delta=0.2, \varepsilon=2, v_1 = v_2 = 1$

Abb. 6 veranschaulicht am gleichen Szenario die zugehörige Werbepolitik im Zeitpunkt $t=0$. In Abhängigkeit der Lagerkonstellation sind verschiedene Werberaten optimal. In diesem Beispiel steigen die Werberaten in beiden Lagerbeständen. Für die restlichen Zeitpunkte sind die Werberaten strukturell ähnlich. Die Höhe der Werberaten hängt dabei direkt von der Ankunftsintensität $u(t)$ sowie dem Werbekostenparameter $k(t)$ ab, vgl. Formel für die optimale Werbung $w_n(t)$ in Theorem 4.1.

4.2 Auswertung und Simulation

Im Folgenden wollen wir die konstruierten optimalen Politiken auswerten. Eine Form der Auswertung der zu erwartenden Verkaufsergebnisse ist die Bestimmung von Zustandswahrscheinlichkeiten $q(t, \vec{y})$. Diese geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich der Verkaufsprozess zu einem Zeitpunkt t in einem bestimmten Zustand \vec{y} befindet. Das folgende Lemma bietet die Möglichkeit derartige Zustandswahrscheinlichkeiten für das vorgestellte Mehrproduktmodell mit endlichem Horizont zu berechnen.

Lemma 4.1. Mit der Funktion $g(t) := e^{-\gamma \cdot R(t)} \cdot A(t)$ lassen sich die optimalen Verkaufsraten, vgl. Theorem 4.1, ausdrücken als $\lambda_{\vec{y}}^{(i)}(t) = \eta(t) / A(t) \cdot b_i(\vec{y}) = -\dot{g}(t) / g(t) \cdot b_i(\vec{y})$. Die Zustandswahrscheinlichkeiten $q(t, \vec{y})$ erfüllen die folgende Rekursion, $0 \leq t \leq T$, $\vec{0} \leq \vec{y} < \vec{N}$,

$$q(t, \vec{y}) = \sum_i g(t) \sum_k^{b_k(\vec{y})} \cdot b_i(\vec{y} + h_i) \cdot \int_0^t \frac{-\dot{g}(s)}{g(s) \sum_k^{b_k(\vec{y})+1}} \cdot q(s, \vec{y} + h_i) \, ds,$$

beginnend mit $q(t, \vec{N}) = (g(t) / g(0)) \sum_k^{b_k(\vec{N})}$; h_i ist der i -te Einheitsvektor im I -dimensionalen Raum.

Beweis. Siehe Anhang.

Eine weitere wichtige Form der Auswertung optimaler Strategien ist die Simulation von Verkaufsprozessen und kann in folgender Weise durch das Simulieren von Verkaufszeitpunkten erfolgen. Das Verfahren basiert auf der gemeinsamen Zeitabhängigkeit der einzelnen inhomogenen, zustandsabhängigen Sprungraten der I Produkte.

Proposition 4.1. Die Verkaufsraten seien der Form $\lambda_{\vec{y}}^{(i)}(t) = -\dot{g}(t) / g(t) \cdot b_i(\vec{y})$. Bezeichne $\tau_{\vec{m}}$ den Beginn und $\tau_{\vec{m}}^{(+)}$ das Ende des Zeitintervalls in dem das System in Zustand \vec{m} , $\vec{0} < \vec{m} \leq \vec{N}$, ist.

(i) Für gegebene $\vec{m} = (m^{(1)}, \dots, m^{(I)})$ gilt die Beziehung, $0 \leq s < t \leq T$, $\vec{0} < \vec{m} \leq \vec{N}$,

$$P(\tau_{\vec{m}}^{(+)} \leq t | \tau_{\vec{m}} = s) = 1 - \left(\frac{g(t)}{g(s)} \right)^{\sum_i b_i(\vec{m})}$$

und $(g(\tau_{\vec{m}}^{(+)}) / g(\tau_{\vec{m}}))^{\sum_i b_i(\vec{m})} \Big|_{\tau_{\vec{m}}} \Big|_{\tau_{\vec{m}}}$ bedingt an $\tau_{\vec{m}}$ ist $U(0,1)$ gleichverteilt.

(ii) Für alle Zustände $\vec{0} < \vec{m} \leq \vec{N}$ und gegebene Zeitpunkte $\tau_{\vec{m}}$ lässt sich der Zeitpunkt der nächsten Zustandsveränderung $\tau_{\vec{m}}^{(+)}$ mittels gleichverteilten Zufallsvariablen $U_{\vec{m}} \sim U(0,1)$ simulieren:

$$g(\tau_{\vec{m}}^{(+)}) = U_{\vec{m}}^{1/\sum_i b_i(\vec{m})} \cdot g(\tau_{\vec{m}}), \quad \text{wobei } \tau_{\vec{N}} := 0.$$

Im *zeithomogen* Fall ist $g(t) = \eta \cdot \frac{e^{-\gamma \cdot r \cdot t} - e^{-\gamma \cdot r \cdot T}}{\gamma \cdot r}$, und es gilt die Rekursion, $\vec{0} < \vec{m} \leq \vec{N}$,

$$\tau_{\vec{m}}^{(+)} \stackrel{\text{hom}}{=} -\frac{1}{\gamma \cdot r} \ln \left(U_{\vec{m}}^{1/\sum_i b_i(\vec{m})} \cdot (e^{-\gamma \cdot r \cdot \tau_{\vec{m}}} - e^{-\gamma \cdot r \cdot T}) + e^{-\gamma \cdot r \cdot T} \right).$$

- (iii) In $\tau_{\vec{m}}^{(+)}$ geht der Zustand \vec{m} in einen neuen Zustand über. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Folgezustand $\vec{m} - h^{(i)}$ ist, $1 \leq i \leq I$, d.h. ein Artikel der Klasse i verkauft wurde, lautet

$$P[\vec{m} \rightarrow \vec{m} - h^{(i)}; \tau_{\vec{m}}^{(+)} = \tau_{\vec{m} - h^{(i)}}] = \frac{\int_{\tau_{\vec{m}}}^{\tau_{\vec{m}}^{(+)}} \lambda_{\vec{m}}^{(i)}(s) ds}{\sum_{j=1, \dots, I} \int_{\tau_{\vec{m}}}^{\tau_{\vec{m}}^{(+)}} \lambda_{\vec{m}}^{(j)}(s) ds} = \frac{b_{\vec{m}}^{(i)}}{\sum_{j=1, \dots, I} b_{\vec{m}}^{(j)}}.$$

- (iv) Die durch die Schritte (ii) und (iii) beschriebene Rekursion endet, wenn alle Produkte aller Klassen verkauft sind. Auf Basis der simulierten Verkaufszeitpunkte $\tau_{\vec{m}}$ lassen sich die bis zum Zeitpunkt t kumulierten Umsätze $U^{(i)}(t)$ und die Werbeausgaben $W(t)$ wie folgt berechnen:

$$U^{(i)}(t) = \sum_{\substack{\text{alle } \tau_{\vec{m}}^{(+)} \leq t, \\ \tau_{\vec{m}}^{(+)} \text{ Verkauf vom Typ } i}} e^{-R(\tau_{\vec{m}}^{(+)})} \cdot v^{(i)} \cdot p_{\vec{m}}^{(i)}(\tau_{\vec{m}}^{(+)}),$$

$$\text{und} \quad W(t) = \sum_{\text{alle } \tau_{\vec{m}} \leq t,} \int_{\tau_{\vec{m}}}^{\min(\tau_{\vec{m}}^{(+)}, t)} e^{-R(s)} \cdot k(s) \cdot w_{\vec{m}}(s) ds.$$

Die Gesamtgewinne sind gegeben durch $G(t) := \sum_{i=1}^I U^{(i)}(t) - W(t)$.

Beweis. Siehe Anhang.

Ohne Stückkosten werden im Falle der betrachteten isoelastischen Nachfrage alle Artikel bis zum Zeitpunkt T verkauft, vgl. Kapitel 1. Daraus folgt, dass ein simulierter Abverkaufsprozess aus genau $\sum N_i$ Verkaufszeitpunkten besteht, wobei jedem Zeitpunkt genau eine Produktklasse zugeordnet ist, vgl. (iii). Jede derartige Simulation lässt sich im Hinblick auf die Evolution der Bestände und die optimal gesteuerten Preistrajektorien für alle Produktklassen auswerten. Die Bestimmung der realisierten Umsätze und Werbeausgaben folgt direkt aus der natürlichen Definition, vgl. (iv). Mittels einer Vielzahl von Simulationen können dann Gesamtgewinnverteilungen leicht untersucht werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir ein zeithomogenes Beispiel mit endlichem Zeithorizont und drei Produkttypen. Wir unterstellen die verschiedenen Anfangsbestände $(N_1, N_2, N_3) = (5, 8, 10)$ und den produktspezifischen Adoptionseffekt $\chi_n^{(i)} := 1 + n_i / (1 + n_1 + n_2 + n_3)$, $1 \leq i \leq 3$. Die Wahl der übrigen Modellparameter ist in der Beschreibung von Tabelle 1 erklärt.

Wir betrachten die zufällige Realisierung *eines* simulierten Abverkaufs mit insgesamt 23 Einheiten. Wie erwartet findet ein vollständiger Abverkauf statt. In der Tabelle sind die entsprechenden Verkaufszeitpunkte, die zwischenzeitlichen Zustände und die kumulierten Abverkaufszahlen der drei Produktklassen angegeben. Der letzten Spalte ist die Akkumulierung des Gewinns, d.h. der Umsätze abzüglich der Werbeausgaben, zu entnehmen. Der erwartete Gesamtgewinn beträgt in diesem Beispiel $V_{\bar{N}}(0) = 4.698$; der simulierte Umsatz (5.24) abzgl. Werbekosten (0.49) beträgt 4.75.

Verkauf #	Zeit t	Zustand			Typ 1 X_1	Typ 2 X_2	Typ 3 X_3	Gewinn G_t
		Y_1	Y_2	Y_3				
0	0.000	5	8	10	0	0	0	0.00
1	0.027	5	7	10	0	1	0	0.22
2	0.103	5	6	10	0	2	0	0.37
3	0.118	5	6	9	0	2	1	0.58
4	0.179	5	6	8	0	2	2	0.72
5	0.190	5	6	7	0	2	3	0.94
6	0.192	5	5	7	0	3	3	1.15
7	0.230	5	5	6	0	3	4	1.35
8	0.272	5	5	5	0	3	5	1.51
9	0.322	5	4	5	0	4	5	1.71
10	0.335	5	4	4	0	4	6	1.91
11	0.343	4	4	4	1	4	6	2.14
12	0.348	4	4	3	1	4	7	2.38
13	0.409	4	4	2	1	4	8	2.62
14	0.410	3	4	2	2	4	8	2.84
15	0.426	3	3	2	2	5	8	3.07
16	0.472	2	3	2	3	5	8	3.29
17	0.508	2	3	1	3	5	9	3.55
18	0.514	1	3	1	4	5	9	3.82
19	0.534	1	2	1	4	6	9	4.05
20	0.635	0	2	1	5	6	9	4.37
21	0.778	0	1	1	5	7	9	4.48
22	0.933	0	1	0	5	7	10	4.57
23	0.961	0	0	0	5	8	10	4.75

Tabelle 1. $I=3, T=1, r=1, \delta=0.2, \mathcal{E}=1.8, N_1=5, N_2=8, N_3=10, u=k=1, L=0,$

$$\chi_n^{(i)} := 1 + n_i / (1 + n_1 + n_2 + n_3), (v_1, v_2, v_3) = (1, 1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$$

X_i bezeichnet die Anzahl verkaufter Artikel von Typ $i, i=1,2,3$

Die abklingende Verkaufsgeschwindigkeit sowie die konkav steigende Gewinnakkumulation ist auf die Diskontierung zurückzuführen. Der Abverkauf innerhalb der drei Produktklassen ist auch in wiederholten Simulationen weitestgehend gleichmäßig. Dies kann u.a. dadurch erklärt werden, dass der angenommene Adoptionseffekt stabilisierend wirkt: läuft der Abverkauf eines Produkts vergleichsweise schnell ab, so wird die Nachfrage durch die Adoptionsfunktion gedrosselt. Diese Wirkungsweise passt z.B. zum Verkauf von Früchten, unter der Annahme, dass die letzten Artikel einer bereits „ausgesuchten“ Sorte schlecht nachgefragt werden, wenn es von einem Vergleichsprodukt noch mehr Auswahl gibt. Das Beispiel zeigt, wie der optimale Verkauf mehrerer Produkte abläuft und wie auf zustandsabhängige Nachfrageeffekte reagiert werden sollte.

5 Fazit

In diesem Kapitel haben wir ein stochastisches dynamisches Mehrproduktmodell mit übergreifender dynamischer Werbekomponente betrachtet. Dabei wurden neben produkt-spezifischen Stückkosten auch zustandsabhängige Lagerkosten berücksichtigt. Darüber hinaus ist es in dem vorgestellten erweiterten Modell möglich für jede einzelne Produktklasse allgemeine Adoptionseffekte zu betrachten, welche von der gesamten Restbestands-konstellation abhängen. Somit ist es möglich sehr viel allgemeinere Verkaufsprobleme zu analysieren.

Für den Fall isoelastischer Nachfrage haben wir Modelle mit verderblichen und langlebigen Gütern untersucht, optimale Preis-Werbepolitiken bestimmt und die zu erwartenden Verkaufsergebnisse durch die Berechnung von Zustandswahrscheinlichkeiten und der effizienten Erstellung von Simulationen ausgewertet. Um die Ergebnisse zu illustrieren wurden verschiedene Beispiele betrachtet.

Die Lösung beider Modellvarianten basiert auf der Berechnung der Wertefunktion für mehrdimensionale Zustandsräume. Hierfür stellen wir ein rekursives Verfahren vor und zeigen, wie sich Existenz und Eindeutigkeit der bestimmten Lösung nachweisen lässt. Im zeithomogenen Fall mit unendlichem Horizont kann das Verfahren auch auf andere Nachfrageklassen übertragen werden.

Literatur

- Bagwell, K. (2007). *The Economic Analysis of Advertising*. Handbook of Industrial Organization, Elsevier.
- Bass, F. (1969). *A New Product Growth Model for Consumer Durables*. Management Science 15 (5), 215-226.
- Bertsimas, D., S. de Boer (2005). *Special Issue Papers: Dynamic Pricing and Inventory Control for Multiple Products*. Journal of Revenue and Pricing Management 3 (4), 303-319.
- Bitran, G., R. Caldentey (2003). *An Overview of Pricing Models for Revenue Management*. Manufacturing & Service Operations Management 5 (3), 203-229.
- Brémaud, P. (1980). *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. Springer, New York.
- Elmaghraby, W., P. Keskinocak (2003). *Dynamic Pricing in the Presence of Inventory Considerations: Research Overview, Current Practices, and Future Directions*. Management Science 49 (10), 1287-1309.
- Feichtinger, G, R. F. Hartl, S. P. Sethi (1994). *Dynamic Optimal Control Models in Advertising: Recent Developments*. Management Science 40 (2), 195-226.
- Gallego, G., G. van Ryzin (1997). *A Multi-Product Dynamic Pricing Problem and its Application to Network Yield Management*. Operations Research 45, 24-41.

- Gallego, G., R. Wang (2013). *Multi-Product Optimization and Competition under the Nested Logit Model with Product-Differentiated Price Sensitivities*. Operations Research, Forthcoming. Available at SSRN: ssrn.com/abstract=1995648 oder <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1995648>.
- Gershkov, A., B. Moldovanu (2009). *Dynamic Revenue Maximization with Heterogeneous Objects: A Mechanism Design Approach*. American Economic Journal: Microeconomics 1, 168-198.
- Gönsch, J., R. Klein, C. Steinhardt (2009). *Dynamic Pricing – State-of-the-Art*. Zeitschrift für Betriebswirtschaft 79, special issue 3, 1-40.
- Helmes, K., R. Schlosser (2013). *Dynamic Advertising and Pricing with Constant Demand Elasticities*. Journal of Economic Dynamics and Control 37, 2814-2832.
- Helmes, K., R. Schlosser, M. Weber (2013). *Dynamic Advertising and Pricing in a Class of General New-Product Adoption Models*. European Journal of Operational Research 229, 433-443.
- Huang, J., M. Leng, L. Liang. (2012). *Recent Developments in Dynamic Advertising Research*. European Journal of Operational Research 220, 591-609.
- Phillips, R. (2005). *Pricing and Revenue Optimization*. Stanford University Press, Stanford, CA.
- Sethi, S. P. (1973). *Optimal Control of the Vidale-Wolfe Advertising Model*. Operations Research 21 (4), 998-1013.
- Sethi, S. P., G. L. Thompson (2000). *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics*. Second Edition, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Shen, Z. M., X. Su (2007). *Customer Behavior Modeling in Revenue Management and Auctions: A Review and New Research Opportunities*. Production Operations Management 16 (6), 713-728.
- Steffenhagen, H. (2006). *Analytische Planung Effektiver und Effizienter Werbemixes*. Zeitschrift für Betriebswirtschaft 76, Heft 5, 499-524.
- Talluri, K. T., G. van Ryzin (2004). *The Theory and Practice of Revenue Management*. Kluwer Academic Publishers.

Appendix

Abschnitt 2 (Modellbeschreibung und Lösungsansatz)

Herleitung der Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Wir betrachten die Bellman Gleichung, vgl. (2.2),

$$-\dot{V}_{\vec{n}}(t) + r(t) \cdot V_{\vec{n}}(t) = \sup_{\vec{p} > 0, w \geq 0} \underbrace{\left\{ u(t) \cdot w^\delta \cdot \sum_{i=1,2,\dots,I} \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot (v_i \cdot p_i - c_i - \Delta_i V_{\vec{n}}(t)) - k(t) \cdot w \right\}}_{=: K_{\vec{n}}(t, \vec{p}, w)} - L_{\vec{n}}.$$

des in Abschnitt 2 beschriebenen monopolistischen Mehrproduktmodells. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{\partial K_{\vec{n}}(t, \vec{p}, w)}{\partial p_i} &= -u(t) \cdot w^\delta \cdot \varepsilon_i \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i-1} \cdot (v_i \cdot p_i - c_i - \Delta_i V_{\vec{n}}(t)) + u(t) \cdot w^\delta \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot v_i \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{u(t) \cdot w^\delta \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)}}{p_i^{\varepsilon_i}} \cdot (v_i - \varepsilon_i \cdot p_i^{-1} \cdot (v_i \cdot p_i - c_i - \Delta_i V_{\vec{n}}(t))) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Big| \cdot \frac{p_i^{\varepsilon_i}}{u(t) \cdot w^\delta \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)}} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow v_i \cdot p_i = \varepsilon_i \cdot v_i \cdot p_i - \varepsilon_i \cdot (c_i + \Delta_i V_{\vec{n}}(t)) \\ &\Leftrightarrow v_i \cdot p_i \cdot (1 - \varepsilon_i) = -\varepsilon_i \cdot (c_i + \Delta_i V_{\vec{n}}(t)) \\ &\Leftrightarrow p_{\vec{n}}^{(i)}(t) = \frac{\varepsilon_i}{v_i \cdot (\varepsilon_i - 1)} \cdot (c_i + \Delta_i V_{\vec{n}}(t)) \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, I \\ \text{(ii)} \quad \frac{\partial K_{\vec{n}}(t, \vec{p}, w)}{\partial w} &= \delta \cdot u(t) \cdot w^{\delta-1} \cdot \sum_i \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot \underbrace{(v_i \cdot p_i - c_i - \Delta_i V_{\vec{n}}(t))}_{\stackrel{(i)}{=} v_i \cdot p_i / \varepsilon_i} - k(t) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \delta \cdot u(t) \cdot w^{\delta-1} \cdot \sum_i \varepsilon_i^{-1} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i+1} \cdot v_i = k(t) \\ &\Leftrightarrow \frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \cdot \sum_{i=1,\dots,I} \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i+1} = w^{1-\delta} \\ &\Leftrightarrow w_{\vec{n}}(t) = \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \cdot \sum_{i=1,\dots,I} \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}. \end{aligned}$$

Für gegebene Werte $\Delta_i V_{\vec{n}}(t)$ sind $p_{\vec{n}}^{(i)}(t)$ und $w_{\vec{n}}(t)$ durch die beiden obigen Optimalitätsbedingungen eindeutig bestimmt. Mit $c_i + \Delta_i V_{\vec{n}}(t) > 0$ folgt zudem $p_{\vec{n}}^{(i)}(t) > 0$ und $w_{\vec{n}}(t) > 0$ ($\delta > 0$) bzw. $w_{\vec{n}}(t) = 0$ ($\delta = 0$).

Herleitung der Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

Aus den Bedingungen erster Ordnung folgt $v_i \cdot p_n^{(i)}(t) > c_i + \Delta_i V_n(t)$. Für $p_n^{(i)}(t) > 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \frac{\partial^2 K_n(t, \vec{p}, w)}{\partial p_i^2} &= u(t) \cdot w^\delta \cdot \left(\varepsilon_i \cdot (\varepsilon_i + 1) \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i - 2} \cdot \underbrace{(v_i \cdot p_i - c_i - \Delta_i V_n(t))}_{\stackrel{(i)}{=} v_i \cdot p_i / \varepsilon_i} - 2 \varepsilon_i \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i - 1} \cdot v_i \right) \\
 &= u(t) \cdot w^\delta \cdot v_i \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i - 1} \cdot ((\varepsilon_i + 1) - 2 \cdot \varepsilon_i) \\
 &= \underbrace{u(t) \cdot w^\delta \cdot v_i \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i - 1}}_{>0} \cdot \underbrace{(1 - \varepsilon_i)}_{<0} < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \frac{\partial^2 K_n(t, \vec{p}, w)}{\partial p_i \partial w} &= -u(t) \cdot \delta \cdot w^{\delta-1} \cdot \varepsilon_i \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i - 1} \cdot (v_i \cdot p_i - c_i - \Delta_i V_n(t)) + u(t) \cdot \delta \cdot w^{\delta-1} \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot v_i \\
 &= -u(t) \cdot \delta \cdot w^{\delta-1} \cdot \varepsilon_i \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i - 1} \cdot (v_i \cdot p_i / \varepsilon_i) + u(t) \cdot \delta \cdot w^{\delta-1} \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot v_i \\
 &= -u(t) \cdot \delta \cdot w^{\delta-1} \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot v_i + u(t) \cdot \delta \cdot w^{\delta-1} \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot v_i = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad \frac{\partial^2 K_n(t, \vec{p}, w)}{\partial w^2} &= \delta \cdot (\delta - 1) \cdot u(t) \cdot w^{\delta-2} \cdot \sum_i \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot (v_i \cdot p_i - c_i - \Delta_i V_n(t)) \\
 &= \delta \cdot (\delta - 1) \cdot u(t) \cdot w^{\delta-2} \cdot \sum_i \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot (v_i \cdot p_i / \varepsilon_i) \\
 &= \delta \cdot \underbrace{(\delta - 1) / \varepsilon_i}_{<0} \cdot u(t) \cdot w^{\delta-2} \cdot \sum_i \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i + 1} \cdot v_i < 0
 \end{aligned}$$

$$\text{(iv)} \quad \left. \frac{\partial^2 K_n(t, \vec{p}, w)}{\partial p_i \partial p_j} \right|_{i \neq j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(-u(t) \cdot w^\delta \cdot \varepsilon_i \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i - 1} \cdot (v_i \cdot p_i - c_i - \Delta_i V_n(t)) + u(t) \cdot w^\delta \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot v_i \right) = 0.$$

Somit folgt, dass die Hessematrix negativ definit ist, und der Punkt $(p_n^{(1)}(t), p_n^{(2)}(t), \dots, p_n^{(I)}(t), w_n(t))$ einem Maximum entspricht.

Herleitung der Struktur der Differenzen-Differentialgleichung (2.6)

$$\text{Mit } p_i = p_n^{(i)}(t) = \frac{\varepsilon_i}{v_i \cdot (\varepsilon_i - 1)} \cdot (c_i + \Delta_i V_n(t)) \quad \text{und} \quad w = w_n(t) = \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \cdot \sum_{i=1, \dots, I} \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i + 1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
 -\dot{V}_n(t) + r(t) \cdot V_n(t) + L_n &= u(t) \cdot w^\delta \cdot \sum_i \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot (v_i \cdot p_i - c_i - \Delta_i V_n(t)) - k(t) \cdot w \\
 &= u(t) \cdot w^\delta \cdot \sum_i \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \cdot \left(\frac{v_i \cdot p_i}{\varepsilon_i} \right) - k(t) \cdot w \\
 &= u(t) \cdot w^\delta \cdot \sum_i \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_n^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i + 1} - k(t) \cdot w \quad (\text{Einsetzen der opt. Werberaten})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u(t) \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \cdot \sum_i \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \sum_i \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i+1} - k(t) \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \cdot \sum_i \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \\
&= \frac{k(t)}{\delta} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \cdot \sum_i \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}+1} - k(t) \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \cdot \sum_i \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \\
&= \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \cdot \sum_{i=1, \dots, I} \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \left(\frac{k(t)}{\delta} - k(t) \right) \\
&= k(t) \cdot \frac{1-\delta}{\delta} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \cdot \sum_i \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot p_i^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \quad (\text{Einsetzen der opt. Preise}) \\
&= k(t) \cdot \frac{1-\delta}{\delta} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t)} \cdot \sum_{i=1, \dots, I} \frac{v_i}{\varepsilon_i} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot \left(\frac{\varepsilon_i}{v_i \cdot (\varepsilon_i - 1)} \cdot (c_i + \Delta_i V_{\vec{n}}(t)) \right)^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \\
&= \sum_{i=1, \dots, I} \underbrace{\gamma_i \cdot k(t) \cdot \frac{\varepsilon_i - \delta}{\delta} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon_i} \cdot \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i - 1} \right)^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}}_{\eta_i(t)} \cdot \left(\chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot v_i^{\varepsilon_i} \cdot (c_i + \Delta_i V_{\vec{n}}(t))^{-\varepsilon_i+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}.
\end{aligned}$$

Die vorgenommenen Umformungen sind allesamt elementar.

Abschnitt 3.2 (Auswertung Unendlicher Horizont)

Beweis von Proposition 3.1: (Simulation der Verkaufszeitpunkte)

(i) Sei $\tau_{\vec{N}} := 0$. Per Definition ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Zustand $\vec{m} = (m^{(1)}, \dots, m^{(I)})$ ein Verkauf vor t , $t \leq T$, stattfindet bedingt an den letzten Verkaufszeitpunkt $s = \tau_{\vec{m}}$, $0 \leq s < t$, gleich

$$P(\tau_{\vec{m}}^{(+)} \leq t \mid \tau_{\vec{m}} = s) = \int_s^t e^{-\lambda_{\vec{m}} \cdot (u-s)} \cdot \lambda_{\vec{m}} \, du = 1 - e^{-\lambda_{\vec{m}}(t-s)};$$

d.h. die Wartezeiten $\tau_{\vec{m}}^{(+)} - \tau_{\vec{m}}$ sind $\text{Exp}(\lambda_{\vec{m}})$ exponentialverteilt. Damit ergibt sich $\tau_{\vec{m}}^{(+)} := \tau_{\vec{m}} + \ln(U^{-\lambda_{\vec{m}}})$, $U \sim U(0,1)$, vgl. (3.4), für alle Zustände.

Beweis von Lemma 3.1. (Zustandswahrscheinlichkeiten)

Unter der Annahme, dass die einzelnen Verkaufsraten der Produkte i durch $\lambda_{\vec{y}}^{(i)}$ gegeben sind, $i = 1, 2, \dots, I$, wollen wir die assoziierten Zustandswahrscheinlichkeiten $q(t, \vec{y}) = P[\vec{Y}_t = \vec{y}]$ bestimmen. Wir zeigen, dass $q(t, \vec{y})$ die folgende Rekursion erfüllt, $0 \leq t < \infty$, $\vec{0} \leq \vec{y} < \vec{N}$,

$$q(t, \vec{y}) = \sum_i e^{-\lambda_{\vec{y}}^{(i)} \cdot t} \cdot \lambda_{\vec{y}+h_i}^{(i)} \cdot \int_0^t e^{\lambda_{\vec{y}}^{(i)} \cdot s} \cdot q(s, \vec{y} + h_i) \, ds, \quad \text{wobei} \quad q(t, \vec{N}) = e^{-\lambda_{\vec{N}} \cdot t}.$$

Für $T = \infty$ und die Gesamtrate $\lambda_{\vec{y}} := \sum_i \lambda_{\vec{y}}^{(i)}$ muss im Anfangszustand \vec{N} gelten:

$$\dot{q}(t, \vec{N}) \stackrel{!}{=} - \sum_i \lambda_{\vec{N}}^{(i)} \cdot q(t, \vec{N}) = -\lambda_{\vec{N}} \cdot q(t, \vec{N}), \quad \text{und} \quad q(0, \vec{N}) = 1.$$

Wir erhalten somit $q(t, \vec{N}) = e^{-\int_0^t \lambda_{\vec{N}} ds} = e^{-\lambda_{\vec{N}} t}$.

Für alle übrigen Zustände ist die Evolution von q bestimmt durch $q(0, \vec{y}) = 0 \quad \forall \quad \vec{y} < \vec{N}$ und

$$\dot{q}(t, \vec{y}) = \sum_i \lambda_{\vec{y}+h_i}^{(i)} \cdot q(t, \vec{y}+h_i) - \sum_i \lambda_{\vec{y}}^{(i)} \cdot q(t, \vec{y}).$$

Wir überprüfen nun ob die letzte Differentialgleichung gelöst wird durch

$$q(t, \vec{y}) = \sum_i e^{-\lambda_{\vec{y}}^{(i)} t} \cdot \lambda_{\vec{y}+h_i}^{(i)} \cdot \int_0^t e^{\lambda_{\vec{y}}^{(i)} s} \cdot q(s, \vec{y}+h_i) ds.$$

Die Ableitung des Lösungskandidaten nach der Zeit t liefert

$$\begin{aligned} \dot{q}(t, \vec{y}) &= \sum_i \left(-\lambda_{\vec{y}}^{(i)} \cdot e^{-\lambda_{\vec{y}}^{(i)} t} \cdot \lambda_{\vec{y}+h_i}^{(i)} \cdot \underbrace{\int_0^t e^{\lambda_{\vec{y}}^{(i)} s} \cdot q(s, \vec{y}+h_i) ds}_{q(t, \vec{y})} + e^{-\lambda_{\vec{y}}^{(i)} t} \cdot \lambda_{\vec{y}+h_i}^{(i)} \cdot e^{\lambda_{\vec{y}}^{(i)} t} \cdot q(t, \vec{y}+h_i) \right) \\ &= \sum_i \left(-\lambda_{\vec{y}}^{(i)} \cdot q(t, \vec{y}) + \lambda_{\vec{y}+h_i}^{(i)} \cdot q(t, \vec{y}+h_i) \right), \end{aligned}$$

und die Probe ist erfüllt. Die Randbedingungen $q(0, \vec{y}) = 0 \quad \forall \quad \vec{y} < \vec{N}$ sind ebenfalls erfüllt.

Abschnitt 4.1 (Endlicher Horizont)

Beweis von Theorem 4.1. (Optimale Kontrollen und Verkaufsraten)

Aus den Optimalitätsbedingungen ergibt sich direkt:

$$\text{optimale Preise:} \quad p_{\vec{n}}^{(i)}(t) = \frac{\varepsilon}{v_i \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot \Delta_i V_{\vec{n}}(t) = \frac{\varepsilon}{v_i \cdot (\varepsilon - 1)} \cdot A(t)^{1/\gamma} \cdot \underbrace{\Delta_i \beta_{\vec{n}}}_{\beta_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_I} - \beta_{n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots, n_I}}$$

$$\text{optimale Werbung:} \quad w_{\vec{n}}(t) = \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{i=1, \dots, I} \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot v_i \cdot p_{\vec{n}}^{(i)}(t)^{-\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}.$$

Wir zeigen, dass für die Einzel-Verkaufsraten gilt, $i = 1, \dots, I$:

$$\lambda_{\vec{n}}^{(i)}(t) := \lambda^{(i)}(t, p_{\vec{n}}^{(i)}(t), w_{\vec{n}}(t)) = \frac{\eta(t)}{A(t)} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - \delta} \cdot \chi_{\vec{n}}^{(i)} \cdot v_i^\varepsilon \cdot (\Delta_i \beta_{\vec{n}})^{-\varepsilon} \cdot \beta_{\vec{n}}^\delta.$$

Aus der Definition von $\lambda^{(i)}$, $i=1,...,I$, in Verbindung mit den optimalen feedback Kontrollen folgt durch elementare Umformungen:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\bar{n}}^{(i)}(t) &:= \lambda^{(i)}(t, p_{\bar{n}}^{(i)}(t), w_{\bar{n}}(t)) = u(t) \cdot w_{\bar{n}}(t)^{\delta} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot p_{\bar{n}}^{(i)}(t)^{-\varepsilon} \\
&= u(t) \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{j=1,...,I} \chi_{\bar{n}}^{(j)} \cdot v_i \cdot p_{\bar{n}}^{(i)}(t)^{-\varepsilon+1} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot p_{\bar{n}}^{(i)}(t)^{-\varepsilon} \\
&= u(t) \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{j=1,...,I} \chi_{\bar{n}}^{(j)} \cdot v_j \cdot \left(\frac{\varepsilon}{v_j \cdot (\varepsilon-1)} \cdot A(t)^{1/\gamma} \cdot \Delta_j \beta_{\bar{n}} \right)^{-\varepsilon+1} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{v_i \cdot (\varepsilon-1)} \cdot A(t)^{1/\gamma} \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}} \right)^{-\varepsilon} \\
&= u(t) \cdot A(t)^{\frac{1-\delta}{\varepsilon-\delta} \cdot \frac{-\varepsilon+1}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \sum_j \chi_{\bar{n}}^{(j)} \cdot v_j \cdot \left(\frac{\varepsilon}{v_j \cdot (\varepsilon-1)} \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}} \right)^{-\varepsilon+1} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot A(t)^{\frac{1-\delta}{\varepsilon-\delta} \cdot \frac{-\varepsilon}{1-\delta}} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{v_i \cdot (\varepsilon-1)} \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}} \right)^{-\varepsilon} \\
&= u(t) \cdot A(t)^{\frac{-\varepsilon\delta+\delta-\varepsilon+\varepsilon\delta}{\varepsilon-\delta}} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right)^{-\varepsilon+1} \cdot \sum_j \chi_{\bar{n}}^{(j)} \cdot v_j^{\varepsilon} \cdot \Delta_j \beta_{\bar{n}}^{-\varepsilon+1} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{v_i \cdot (\varepsilon-1)} \right)^{-\varepsilon} \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}}^{-\varepsilon} \\
&= u(t) \cdot A(t)^{-1} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right)^{-\varepsilon+1} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right)^{-\varepsilon} \cdot \underbrace{\left(\sum_j \chi_{\bar{n}}^{(j)} \cdot v_j^{\varepsilon} \cdot \Delta_j \beta_{\bar{n}}^{-\varepsilon+1} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}}}_{\beta_{\bar{n}}^{1-\delta}} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot v_i^{\varepsilon} \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}}^{-\varepsilon} \\
&= u(t) \cdot A(t)^{-1} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right)^{-\varepsilon+1} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right)^{-\varepsilon \frac{1-\delta}{\delta}} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot v_i^{\varepsilon} \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}}^{-\varepsilon} \cdot \beta_{\bar{n}}^{\delta} \\
&= u(t) \cdot A(t)^{-1} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right)^{\frac{\delta-\varepsilon}{\delta}} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot v_i^{\varepsilon} \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}}^{-\varepsilon} \cdot \beta_{\bar{n}}^{\delta} \\
&= u(t) \cdot A(t)^{-1} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \right)^{\frac{\varepsilon-\delta}{1-\delta}} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot v_i^{\varepsilon} \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}}^{-\varepsilon} \cdot \beta_{\bar{n}}^{\delta}, \quad \eta(t) = k(t) \cdot \frac{\varepsilon-\delta}{\delta} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right)^{-\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \\
&= \frac{\eta(t)}{A(t)} \cdot \frac{u(t) \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \right)^{\frac{\varepsilon-\delta}{1-\delta}}}{\frac{\varepsilon-\delta}{1-\delta} \cdot k(t) \cdot \frac{1-\delta}{\delta} \cdot \left(\frac{u(t) \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right)^{\frac{-\varepsilon+1}{1-\delta}}} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot v_i^{\varepsilon} \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}}^{-\varepsilon} \cdot \beta_{\bar{n}}^{\delta} \\
&= \frac{\eta(t)}{A(t)} \cdot \frac{\delta}{\varepsilon-\delta} \cdot \frac{u(t)}{k(t)} \cdot \left(\frac{k(t) \cdot \varepsilon}{u(t) \cdot \delta} \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \right) \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot v_i^{\varepsilon} \cdot \Delta_i \beta_{\bar{n}}^{-\varepsilon} \cdot \beta_{\bar{n}}^{\delta} \\
&= \frac{\eta(t)}{A(t)} \cdot \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\delta} \cdot \chi_{\bar{n}}^{(i)} \cdot v_i^{\varepsilon} \cdot (\Delta_i \beta_{\bar{n}})^{-\varepsilon} \cdot \beta_{\bar{n}}^{\delta}, \quad \text{wobei } \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\delta} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Abschnitt 4.2 (Auswertung, Endlicher Horizont)

Beweis von Proposition 4.1. (Simulation der Verkaufszeitpunkte)

(i) Sei $\tau_{\vec{N}} := 0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass im Zustand $\vec{m} = (m^{(1)}, \dots, m^{(I)})$ ein Verkauf vor t , $t \leq T$, stattfindet, ist unter der Bedingung des letzten Verkaufs in $s = \tau_{\vec{m}}$, $0 \leq s < t$, gegeben durch

$$P(\tau_{\vec{m}}^{(+)} \leq t \mid \tau_{\vec{m}} = s) = \int_s^t e^{-\int_s^u \sum_i \lambda_{\vec{m}}^{(i)}(z) dz} \sum_i \lambda_{\vec{m}}^{(i)}(u) du = 1 - e^{-\int_s^t \sum_i \lambda_{\vec{m}}^{(i)}(u) du}. \quad (\text{A1})$$

Die Gesamtrate $\lambda_{\vec{m}}(t) := \sum_i \lambda_{\vec{m}}^{(i)}(t)$ kann geschrieben werden als $\lambda_{\vec{m}}(t) = \frac{-\dot{g}(t)}{g(t)} \cdot \sum_i b_i(\vec{m})$.

Damit folgt aus (A1), $0 \leq s < t \leq T$,

$$\begin{aligned} P(\tau_{\vec{m}}^{(+)} \leq t \mid \tau_{\vec{m}} = s) &= 1 - e^{-\int_s^t \lambda_{\vec{m}}(u) du} = 1 - e^{-\sum_i b_i(\vec{m}) \cdot \int_s^t \frac{\dot{g}(u)}{g(u)} du} \\ &= 1 - e^{\sum_i b_i(\vec{m}) \cdot \ln\left(\frac{g(t)}{g(s)}\right)} = 1 - \left(\frac{g(t)}{g(s)}\right)^{\sum_i b_i(\vec{m})}, \end{aligned}$$

wobei $(g(\tau_{\vec{m}}^{(+)}) / g(\tau_{\vec{m}}))^{\sum_i b_i(\vec{m})} \Big|_{\tau_{\vec{m}}}$ wie bereits in Kapitel 1 gezeigt $U(0,1)$ gleichverteilt ist.

Damit folgt, $g(\tau_{\vec{m}}^{(+)}) = U^{\frac{1}{\sum_i b_i(\vec{m})}} \cdot g(\tau_{\vec{m}})$, $U \sim U(0,1)$, für alle Zustände. Beachte, dass g streng monoton in t fällt und somit eine Umkehrfunktion besitzt. Die Behauptungen (ii) bis (iv) folgen direkt.

Beweis von Lemma 4.1. (Zustandswahrscheinlichkeiten)

Da $\frac{-\dot{g}(t)}{g(t)} = \frac{\gamma \cdot r(t) \cdot e^{-\gamma \cdot R(t)} \cdot A(t) - e^{-\gamma \cdot R(t)} \cdot \dot{A}(t)}{e^{-\gamma \cdot R(t)} \cdot A(t)} = \gamma \cdot r(t) - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\eta(t)}{A(t)}$ ist, folgt mit $\frac{-\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{-\gamma \cdot r(t) \cdot A(t) + \eta(t)}{A(t)} = \frac{\eta(t)}{A(t)} - \gamma \cdot r(t)$, dass die Beziehung $\eta(t) / A(t) = -\dot{g}(t) / g(t)$ gilt.

Wir zeigen nun, dass die Zustandswahrscheinlichkeiten $q(t, \vec{y}) = P[\vec{Y}_t = \vec{y}]$ die Rekursion, $0 \leq t \leq T < \infty$, $\forall \vec{y} < \vec{N}$,

$$q(t, \vec{y}) = \sum_i g(t)^{\sum_k b_k(\vec{y})} \cdot b_i(\vec{y} + h_i) \cdot \int_0^t \frac{-\dot{g}(s)}{g(s)^{\sum_k b_k(\vec{y})+1}} \cdot q(s, \vec{y} + h_i) ds,$$

mit $q(t, \vec{N}) = (g(t) / g(0))^{\sum_k b_k(\vec{N})}$ erfüllen. Sei $T < \infty$ und die Verkaufsrate von Produkt i der Form $\lambda_{\vec{y}}^{(i)}(t) = -\dot{g}(t) / g(t) \cdot b_i(\vec{y})$.

Die Rekursion beginnt im Ausgangszustand \vec{N} , d.h. $q(t, \vec{N})$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{q}(t, \vec{N}) = -\sum_i \lambda_N^{(i)} \cdot q(t, \vec{N}) = \sum_i \dot{g}(t) / g(t) \cdot b_i(\vec{N}) \cdot q(t, \vec{N})$$

mit Randbedingung $q(0, \vec{N}) = 1$. Als Lösung für $q(t, \vec{N})$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} q(t, \vec{N}) &= e^{-\int_0^t \sum_i \lambda_N^{(i)}(s) ds} = e^{\sum_i b_i(\vec{N}) \cdot \int_0^t \dot{g}(s) / g(s) ds} = e^{\sum_i b_i(\vec{N}) \cdot \ln g(s) \Big|_0^t} \\ &= e^{\sum_i b_i(\vec{N}) \cdot \ln \frac{g(t)}{g(0)}} = \left(\frac{g(t)}{g(0)} \right)^{\sum_i b_i(\vec{N})}. \end{aligned}$$

Für die restlichen Zustände $\forall \vec{y} \neq \vec{N}$ ist q bestimmt durch $q(0, \vec{y}) = 0$ und

$$\begin{aligned} \dot{q}(t, \vec{y}) &= \sum_i \lambda_{\vec{y}+h_i}^{(i)}(t) \cdot q(t, \vec{y}+h_i) - \sum_i \lambda_{\vec{y}}^{(i)}(t) \cdot q(t, \vec{y}) \\ &= \sum_i \left(-\frac{\dot{g}(t)}{g(t)} \cdot b_i(\vec{y}+h_i) \cdot q(t, \vec{y}+h_i) + \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} \cdot b_i(\vec{y}) \cdot q(t, \vec{y}) \right). \end{aligned}$$

Die letzte Differentialgleichung wird gelöst durch

$$q(t, \vec{y}) = g(t)^{\sum_k b_k(\vec{y})} \cdot \sum_i \left(b_i(\vec{y}+h_i) \cdot \int_0^t \frac{-\dot{g}(s)}{g(s)^{\sum_k b_k(\vec{y})+1}} \cdot q(s, \vec{y}+h_i) ds \right),$$

da die Randbedingung $q(0, \vec{y}) = 0$ erfüllt ist und die Ableitung der Lösung nach t

$$\begin{aligned} \dot{q}(t, \vec{y}) &= \underbrace{\left(\sum_k b_k(\vec{y}) \right) \cdot \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} \cdot g(t)^{\sum_k b_k(\vec{y})} \cdot \sum_i \left(b_i(\vec{y}+h_i) \cdot \int_0^t \frac{-\dot{g}(s)}{g(s)^{\sum_k b_k(\vec{y})+1}} \cdot q(s, \vec{y}+h_i) ds \right)}_{q(t, \vec{y})} \\ &\quad + g(t)^{\sum_k b_k(\vec{y})} \cdot \sum_i \left(b_i(\vec{y}+h_i) \cdot \frac{-\dot{g}(t)}{g(t)^{\sum_k b_k(\vec{y})+1}} \cdot q(t, \vec{y}+h_i) \right) \\ &= \sum_i \left(b_i(\vec{y}) \cdot \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} \cdot q(t, \vec{y}) - b_i(\vec{y}+h_i) \cdot \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} \cdot q(t, \vec{y}+h_i) \right), \end{aligned}$$

liefert. Daraus folgt schließlich die Behauptung.

V Eine Deterministische Version des Exponentiellen Preismodells mit Dynamischem Werben und Inhomogener Nachfrage

Abstract

Wir untersuchen eine spezielle Klasse dynamischer deterministischer Preis-Werbemodelle mit kontinuierlichem Zustandsraum und endlichem Zeithorizont. Das monopolistische Verkaufsmodell ist durch eine exponentielle Nachfrage mit isoelastischem Werbeeinfluss charakterisiert. Als Verallgemeinerung der deterministischen Variante des Gallego, van Ryzin Preismodells betrachten wir neben Werbung auch zeitabhängige Produktionskosten. Wir leiten explizite Formeln für die optimale Preis-Werbepolitik sowie die optimalen Gewinne her. Die Lösungsformeln werden in feedback und in open loop Form gegeben; sie basieren auf der Konstruktion der Lösung der assoziierten Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung. Wir analysieren ferner die soziale Effizienz monopolistischer Strategien und geben Klassen selbstfinanzierender Subventions- und Besteuerungsmechanismen an, welche soziale Effizienz implementieren. Als zusätzliche Erweiterung zeigen wir wie das Modell auch mit Restwerten sowie zeitabhängigen Lagerkosten gelöst werden kann.

1 Einleitung

In unserem Modell betrachten wir einen Monopolisten welcher eine bestimmte Menge verderblicher Güter gewinnoptimal durch den simultanen dynamischen Einsatz von Preisdifferenzierung und Werbemaßnahmen verkaufen möchte. Verbreitete Anwendungen derartiger Modelle sind typischer Weise der Verkauf von Modeartikeln, Früchten oder Show- bzw. Eventtickets. In reinen Preismodellen, bzw. im Falle exogener Werbung sind das Airline Management oder die Hotelbranche prominente Beispiele.

Der bestmögliche Verkauf verderblicher Güter ist eine klassische Anwendung der Theorie des Revenue Managements. Das Problem ist eng verwandt mit dem Gebiet der dynamischen Preissetzung, welche in den Büchern von Talluri, van Ryzin (2004) und Phillips (2005) intensiv behandelt wird. Die Artikel von McGill, van Ryzin (1999), Bitran, Caldentey (2003), Shen, Su (2007) sowie der deutschsprachige Artikel Gönsch, Klein, Steinhardt (2009) geben einen guten Überblick über die Ergebnisse der letzten zwei Jahrzehnte.

Durch die zusätzliche Berücksichtigung von Werbeeffekten ist unser Modell an der Schnittstelle zwischen dem Revenue Management und dem Marketing angesiedelt. Im Rahmen des Marketings verweisen wir auf das umfassende Buch von Sethi, Thompson (2000) sowie Steffenhagen (2006). Etwas spezifischer geben die Arbeiten von Mahajan, Muller, Bass (1990), Feichtinger, Hartl, Sethi (1994) und Bagwell (2007) sowie der aktuelle Übersichtsartikel Huang, Leng, Liang (2012) einen guten Überblick über verschiedene dynamische Werbemodelle.

Je nach Anwendungsgebiet wird die Dynamik des Abverkaufs i.A. durch eine spezifisch gewählte Verkaufsitensität beschrieben, welche durch den Preis und ggf. über Werbekanäle gesteuert werden kann. Während in dynamischen Preissetzungs- oder Lagerhaltungsmodellen zumeist stochastische reine Preismodelle mit diskretem Zustandsraum betrachtet werden, ist im Marketing die Analyse deterministischer Verkaufsmodelle mit kontinuierlichem Zustand

und mehreren Entscheidungsvariablen (Marketing-Mix) typisch. Beim Verkauf großer Stückzahlen spielt der Einfluss stochastischer Verkaufsentwicklungen gegenüber der Planung der strukturellen langfristigen Markteroberung oft eine untergeordnete Rolle. Der entscheidende Vorteil deterministischer Modelle ist zudem die Möglichkeit für gegebene Strategien die resultierende Abverkaufsevolution direkt auswerten und damit planen zu können.

Der Großteil der deterministischen Marketingmodelle ist durch eine zeithomogene Nachfrage und einen unendlichem Zeithorizont gekennzeichnet. Die explizite Lösung zeitinhomogener Modelle mit *endlichem* Zeithorizont ist dagegen aufgrund der i.A. höheren Komplexität sehr viel schwieriger zu bestimmen und nur in speziellen Fällen möglich. Für den Fall isoelastischer Nachfrage ist die Lösung des Modells – *ohne* die Betrachtung von Stück- oder Lagerkosten – von separabler Struktur und kann für den Fall endlicher Verkaufszeiträume analysiert werden (vgl. Helmes, Schlosser (2013) und Helmes, Schlosser, Weber (2013) siehe unten).

In unserem Modell wollen wir im Falle exponentieller Nachfrage sowohl Stück- als auch Lagerkosten für endliche Zeithorizonte berücksichtigen. Die angenommene Nachfrage vom exponentiellen Typ ist in der Literatur des Revenue Managements verbreitet und hat bereits eine gewisse Tradition, siehe unten. Im Folgenden stellen wir verschiedene vorwiegend *deterministische* mit unserem Modell verwandte explizit lösbare Verkaufsmodelle vor und geben dabei bereits bekannte Resultate wider.

Gallego, van Ryzin (1994) analysieren u.a. deterministische dynamische reine Preismodelle mit endlichem Horizont und allgemeineren Preis-Absatzfunktionen. Sie zeigen, dass im Falle einer *zeithomogenen* Nachfrage der optimale Preispfad konstant ist und das Verkaufsende nicht vorzeitig erreicht wird. Die Aussage gilt auch im Falle einer zeitinhomogenen Ankunftsintensität. Darüber hinaus lösen sie eine zeithomogene *stochastische* Modellvariante für den Spezialfall *exponentieller* Nachfrage. Gemeinsam mit ihrem 1997er Artikel – in welchem die Autoren deterministische und stochastische Mehrproduktmodelle untersuchen – wurden obiger Artikel im Jahre 2011 mit dem „INFORMS Revenue Management and Pricing Historical Prize“ ausgezeichnet.

Berman, Hu, Pang (2013) analysieren erwartete Preistrends für allgemeinere Ankunftsprozesse. Für das deterministische Modell mit exponentieller Nachfrage und zusätzlich *zeitabhängiger Ankunftsintensität* geben sie die optimale Preispolitik an, vgl. Gallego, van Ryzin (1994). Produktionskosten werden dabei nicht berücksichtigt.

Neben den bisher genannten reinen Preismodellen beschäftigen sich aktuelle Arbeiten vermehrt auch mit dynamischen *Preis-Werbemodellen*. MacDonald, Rasmussen (2009) greifen das stochastische Gallego-van Ryzin Modell mit exponentieller Nachfrage auf und führen eine isoelastische Werbekomponente ein. Für den zeithomogenen Fall leiten sie explizite feedback Lösungsformeln für die Wertefunktion und die optimalen Kontrollen her. Die Dynamik des Modells stellt somit ein stochastisches Pendant zu unserem deterministischen Modell dar.

Helmes, Schlosser (2013) erweitern das Preismodell von McAfee, te Velde (2008), um isoelastische Werbung und zeitabhängige Diskontierung. Neben der erwarteten Entwicklung des Preises wird auch die soziale Effizienz optimaler Preis-Werbestrategien untersucht. Es wird nachgewiesen, dass im Falle endogenisierter Werbung die Strategie des Monopolisten i.A. nicht mehr effizient ist. Durch die Einführung eines Besteuerungsmechanismus ist es jedoch möglich soziale Effizienz herzustellen. Derartige Aussagen wollen wir auch in diesem Modell herleiten.

Darüber hinaus wird in Kapitel 1 gezeigt, dass auch die deterministische Version des Modells explizit gelöst werden kann. Kapitel 2, d.h. Helmes, Schlosser, Weber (2013), nutzt diesen Ansatz und verallgemeinert das Modell von Sethi, Prasad, He (2008), so dass auch zeitabhängige Ankunfts- und Diskontraten, endliche Zeithorizonte und allgemeinere Adoptionsfunktionen untersucht werden können. Die Wirkung von Stückkosten wird aber ebenfalls nicht untersucht.

In diesem Kapitel analysieren wir also deterministische Preis-Werbemodelle mit stetigem Zustandsraum, exponentieller Nachfrage und isoelastischem Werbeeffekt. Die Ankunftsrate sowie die Produktions-/Verkaufskosten können zeitabhängig sein. Wir konzentrieren uns auf die folgenden Fragestellungen:

- Wie lautet die optimale Preis-Werbepolitik bzw. die assoziierte Bestandsentwicklung?
- Welchen Einfluss haben Modellgrößen wie Anfangsbestand und Produktionskosten?
- Ist die Politik des Monopolisten sozial effizient?
- Existieren selbstfinanzierende Anpassungsmechanismen?

Das Manuskript ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt 2 geben wir eine Beschreibung des Modells. Um das Modell zu lösen, betrachten wir die Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung und leiten notwendige Optimalitätsbedingungen ab. Wir konstruieren eine explizite Lösung der HJB Gleichung und verifizieren die Richtigkeit der ermittelten Wertefunktion. Im Anschluss erläutern wir die der Lösung zugrunde liegende Struktur und beschreiben die Charakteristik optimaler Strategien. In Abschnitt 3 bestimmen wir die optimale Bestandsentwicklung und untersuchen die Sensitivität der optimalen Kontrollen sowie der zugehörigen Gewinne.

Unter Einbeziehung der Konsumentenrente analysieren wir in Abschnitt 4 die soziale Effizienz optimaler Politiken. Wir vergleichen die Ergebnisse mit den entsprechenden Resultaten von McAfee, te Velde (2006, 2008) sowie Helmes, Schlosser (2013). Des Weiteren identifizieren wir ganze Klassen von effizienten Anpassungen und berechnen die entsprechenden Transferkosten. Abschließend leiten wir selbstfinanzierende Anpassungen her, welche auf Subventions- und Besteuerungsmechanismen beruhen.

In Abschnitt 5 erweitern wir das in Abschnitt 2 formulierte Modell und führen neben einem Restwert für übrige Verkaufseinheiten zeitabhängige Lagerkosten ein. Wir stellen eine allgemeine Transformation vor, mit welcher auch das erweiterte Modell explizit gelöst werden kann. Dabei werden die Lagerkosten und die Restwerte auf veränderte Produktionskosten zurückgeführt. Numerische Beispiele illustrieren das Ergebnis. In Abschnitt 6 geben wir ein Fazit und fassen die Resultate zusammen.

2 Modellbeschreibung und Analytische Lösung

2.1 Modellbeschreibung

Wir untersuchen das folgende deterministische dynamische Abverkaufsproblem in stetiger Zeit: Es gilt die gegebene Menge N , $0 < N < \infty$, eines Guts durch die Wahl von Preis und Werbemaßnahmen gewinnoptimal zu verkaufen. Für den Verkauf steht nur ein endlicher Zeitraum der Länge T , $0 < T < \infty$, zur Verfügung. Des Weiteren unterstellen wir Produktions- bzw. Herstellungskosten pro verkaufte Einheit, welche durch die zeitabhängige Kostenrate

$c(t)$, $t \in [0, T]$, beschrieben werden; letztere wird zunächst als nichtnegativ angenommen, kann aber wie wir später sehen werden auch auf bestimmte negative Werte ausgeweitet werden, vgl. Abschnitt 2.3 und Abschnitt 5. Wir betrachten den kontinuierlichen Zustandsraum $[0, N]$, wobei der Zustand $x(t)$ die Menge der zum Zeitpunkt t noch zu verkaufenden Produkte bezeichnet, $t \in [0, T]$. Die Dynamik des Systems sei gegeben durch

$$-\dot{x}(t) = \lambda(t, p, w) := a(t) \cdot w^\delta \cdot e^{-\varepsilon \cdot p}, \quad x(0) = N, \quad (2.1)$$

wobei die Kontrollen zum Zeitpunkt t aus dem gesetzten Preis p und der Werberate w zusammengesetzt sind. Die Nachfrage wird somit als Produkt aus Preis- und Werbewirkung angenommen und kann wie folgt interpretiert werden. Zusammen mit der gegebenen positiven, zeitstetigen Intensitätsfunktion $a(t)$, kann die zeitabhängige Ankunftsintensität $\varphi(t, w) = a(t) \cdot w^\delta$, $w \geq 0$, $0 \leq \delta < 1$, durch die Wahl der Werberate gesteuert werden. Die Werbewirkung ist dabei konvav steigend, und die Werbeelastizität der Nachfrage ist konstant, d.h. $\eta_w(t, w) := -w / \lambda \cdot (\partial \lambda / \partial w) \equiv \delta$. Der Preiseinfluss ist zeitunabhängig und gegeben durch den Faktor $e^{-\varepsilon \cdot p}$. Angelehnt an die Verteilungsfunktion $F(p) = 1 - e^{-\varepsilon \cdot p}$, $\varepsilon > 0$, mit Erwartungswert $1/\varepsilon$ korrespondiert letzterer mit der Wahrscheinlichkeit, dass der exponentiell verteilte Reservationspreis eines potentiellen Kunden den aktuellen Angebotspreis übersteigt. Die angenommene Preiswirkung impliziert die Nachfrageelastizität $\eta_p(p) := -p / \lambda \cdot (\partial \lambda / \partial p) = \varepsilon \cdot p$.

Als zulässige Kontrollen bezeichnen wir nichtnegative Markovsche Rückkopplungssteuerungen $p(t, x) \in [0, \infty)$ und $w(t, x) \in [0, \infty)$, $t \in [0, T)$, $x \in [0, N)$, welche von Zeit und Zustand abhängen und eine eindeutige Bestandstrajektorie $x(t)$ beschreiben. Das bedeutet formal, dass die Differentialgleichung $-\dot{x}(t) = \lambda(t, p(t, x(t)), w(t, x(t)))$, $x(0) = N$ eine eindeutige Lösung $x(t)$ hat und die Kontrolltrajektorien $p_t := p(t, x(t))$ und $w_t := w(t, x(t))$ als Funktion der Zeit stückweise stetig sind, so dass die assoziierten Gewinne auswertbar sind. Beachte, dass λ stetig differenzierbar in p und w ist, vgl. (2.1). Für Details sei in diesem Zusammenhang auf Lee, Markus (1967) verwiesen. Sobald der Bestandsprozess null erreicht, ist das Verkaufsende $\tau := \min_{0 \leq t \leq T} \{t | x(t) = 0\} \wedge T$ erreicht, und wir setzen $x(t) = 0$ für alle $t \in [\tau, T]$.

Wir wollen eine zulässige Rückkopplungssteuerung bzw. eine zugeordnete Kontrolltrajektorie $\{p_t, w_t | t \in [0, \tau \wedge T]\}$ finden, welche zusammen mit der entsprechenden Zustandstrajektorie $\{x(t) | t \in [0, T]\}$, bestimmt durch (2.1), die Gewinnfunktion

$$\int_0^{\tau \wedge T} \lambda(t, p_t, w_t) \cdot (v \cdot p_t - c(t)) - k(t) \cdot w_t \, dt \quad (2.2)$$

maximiert. Der konstante positive Parameter v und die positive zeitabhängige Parameterfunktion $k(t)$ dienen z.B. der Analyse wie sich verschiedene Besteuerungsmaßnahmen auf die Aktivitäten des Entscheidungsträgers auswirken, vgl. Abschnitt 4. Eine Diskontierung wird nicht betrachtet. Für den speziellen Fall ohne endogenisierte Werbung und ohne Berücksichtigung von Produktionskosten, d.h. $c = \delta = 0$,

ergibt sich mit $v = k(t) \equiv 1$ das deterministische reine Preismodell von Gallego, van Ryzin (1994), bzw. Berman, Hu, Pang (2013) für zeitabhängige Ankunftsintensitäten $a(t)$. Die Lösung beider Modelle basiert dabei auf optimal gewählten Fixpreispolitiken. Wir werden sehen, dass die im Rahmen unseres erweiterten Modells optimalen Preis- und Werbestrategien komplexerer Natur sind.

2.2 Lösungsansatz

Um das in Abschnitt 2.1 beschriebene deterministische Steuerungsproblem zu lösen, wollen wir das Bellman Prinzip nutzen und eine Lösung der assoziierten Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung konstruieren. Die Wertefunktion $J^*(t, x)$ bezeichnet in diesem Zusammenhang ausgehend vom Zustand $x \in [0, N]$ im Zeitpunkt $t \in [0, T]$ den über alle zulässigen Markovschen Rückkopplungssteuerungen ab t maximierten zukünftigen Gewinn

$$\int_t^{T \wedge \tau} \lambda(s, p_s, w_s) \cdot (v \cdot p_s - c(s)) - k(s) \cdot w_s \, ds.$$

Letzterer ist eindeutig bestimmt; für Details wird auf Bertsekas (2005), Kap. 3, verwiesen. Der Lösungswert des Ausgangsproblems, vgl. (2.2), ist dabei insbesondere gegeben durch $J^*(0, N)$. Im Allgemeinen muss die Wertefunktion $J^*(t, x)$ nicht stetig differenzierbar in t und x sein. Für den Fall, dass sie es (wie wir später sehen werden) jedoch ist, kann sie mit Hilfe der unserem Problem zugeordneten HJB Gleichung als Lösung der partiellen Differentialgleichung, $0 \leq t < T$, $0 < x \leq N$,

$$\dot{V}(t, x) + \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ a(t) \cdot e^{-\varepsilon p} \cdot w^\delta \cdot (v \cdot p - c(t) - V'(t, x)) - k(t) \cdot w \right\} = 0, \quad (2.3)$$

mit den Randbedingungen

$$V(T, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq N, \quad \text{und} \quad V(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

bestimmt werden. Dabei stehen \dot{V} und V' für die Zeit- bzw. Ortsableitungen von $V(t, x)$. Gelingt es eine stetig differenzierbare Lösung V zu finden, so lässt sich verifizieren, dass die Funktion V mit J^* identisch ist. Sind die durch (2.3) bestimmten Politiken zulässig, so sind diese optimal, vgl. Bertsekas (2005), Proposition 3.2.1.

Unter der Annahme, dass J^* bzw. V glatt ist, wollen wir zunächst eine Lösung V für (2.3) mit (2.4) konstruieren. Für alle Paare (t, x) , $t < T$, $x > 0$, betrachten wir die notwendigen Optimalitätsbedingungen des zweidimensionalen Optimierungsproblems, definiert in (2.3), und erhalten die Beziehungen, $0 \leq t < T$, $0 < x \leq N$,

$$p^*(t, x) := \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{v} \cdot V'(t, x) \quad \text{und} \quad w^*(t, x) := \left(\frac{a(t) \cdot v \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot e^{-\varepsilon \cdot p^*(t, x)} \right)^{1/(1-\delta)}. \quad (2.5)$$

Es folgt $v \cdot p^*(t, x) - c(t) - V'(t, x) > 0$, und es lässt sich zeigen, dass auch die Bedingungen zweiter Ordnung erfüllt sind, vgl. Anhang Kapitel 6. Die Optimalitätsbedingungen (2.5) beschreiben die optimalen Aktionen in Abhängigkeit von Zeit und Zustand, d.h. in feedback Form. Während die optimalen Werberaten als eine Funktion der optimalen Preise dargestellt

werden können, sind diese im Wesentlichen durch die Summe aus den Produktionskosten $c(t)$, dem festen Aufschlag $1/\varepsilon$ und dem Term $V'(t, x)$ gegeben. Der Aufschlag $1/\varepsilon$ stammt von der Ausfallrate $-\lambda/(\partial\lambda/\partial p)$ und entspricht dem optimalen Aufschlag in stationären Modellen mit unbeschränktem Bestand. In diesem Zusammenhang können die Werte $V'(t, x)$ als Opportunitätskosten interpretiert werden und stellen i.A. einen zusätzlichen Aufschlag dar.

Ist V eindeutig bestimmt, so folgt aus (2.5) zudem, dass die optimalen feedback Kontrollen ebenfalls eindeutig sind. Des Weiteren implizieren die Optimalitätsbedingungen (2.5) die in der folgenden Proposition festgehaltene dynamische Version der Dorfman-Steiner Identität.

Proposition 2.1. Die effektiven optimalen Werberaten $k(t) \cdot w^*(t, x)$ und die optimalen Verkaufsintensitäten $\lambda^*(t, x) := \lambda(t, p^*(t, x), w^*(t, x))$ stehen für alle Zeitpunkte $t \in [0, T]$ und Zustände $x \in (0, N]$ in einem festen Verhältnis, d.h. es gilt

$$\frac{k(t) \cdot w^*(t, x)}{\lambda^*(t, x)} \equiv \frac{v \cdot \delta}{\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Beweis. Aus den Optimalitätsbedingungen (2.5) folgt direkt

$$\frac{k(t) \cdot w^*(t, x)}{v \cdot p^*(t, x) \cdot \lambda(t, p^*(t, x), w^*(t, x))} = \frac{\eta_w(t, w^*(t, x))}{\eta_p(p^*(t, x))}.$$

Mit den zwei Elastizitätsausdrücken, vgl. Abschnitt 2.1, ist letztere Identität äquivalent zu Beziehung (2.6). \square

2.3 Analytische Lösung

Mit den Bedingungen (2.5) für optimale Markov Kontrollen p^* und w^* geht die HJB Gleichung (2.3) in die partielle Differentialgleichung

$$\dot{V}(t, x) + \frac{\beta(t)}{d} \cdot e^{-dV'(t, x)} = 0, \quad (2.7)$$

mit den Randbedingungen (2.4) über, vgl. Kapitel 6. Wir verwenden dabei die Abkürzungen

$$\beta(t) := e^{-d \cdot c(t)} \cdot \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{v \cdot \delta}{\varepsilon \cdot e} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{a(t)}{k(t)^\delta} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}, \quad t \in [0, T] \quad \text{und} \quad d := \frac{\varepsilon}{v \cdot (1-\delta)}. \quad (2.8)$$

Beachte, dass die Parameterfunktion $\beta(t)$ stets positiv ist und neben $a(t)$ und $k(t)$ auch von den Produktionskosten $c(t)$ abhängt. Im nachfolgenden Theorem 2.1 (i) stellen wir die Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.7), welche auch die Randbedingungen (2.4) erfüllt, in expliziter Form dar. Die Verifizierung, dass die Lösung V auch mit der Wertefunktion J^* übereinstimmt, halten wir in Theorem 2.1 (ii) fest. Im Anschluss deuten wir die Idee der Herleitung von V an und interpretieren die Eigenschaften optimaler Preis-Werbepolitiken.

Theorem 2.1.

(i) Sei $B(t) := \int_t^T \beta(s) ds$, vgl. (2.8). Die partielle Differentialgleichung (2.7) mit den Randbedingungen (2.4) hat eine stetig differenzierbare Lösung $V(t, x)$, welche zusammen mit ihren Zeit- und Ortsableitungen durch die folgenden expliziten (feedback) Lösungsformeln gegeben ist, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq N$,

$$V(t, x) = \begin{cases} \frac{B(t)}{d} & , x \geq B(t) \\ \frac{x}{d} \cdot \ln\left(\frac{e \cdot B(t)}{x}\right) & , \text{sonst} \end{cases}, \quad (2.9)$$

$$\dot{V}(t, x) = \begin{cases} -\beta(t)/d & , x \geq B(t) \\ -x/d \cdot \beta(t)/B(t) & , \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad V'(t, x) = \begin{cases} 0 & , x \geq B(t) \\ 1/d \cdot \ln(B(t)/x) & , \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.10)$$

Ist $c(t)/v + 1/\varepsilon \geq 0$, so sind die optimalen Markov Kontrollen p^* und w^* sowie die resultierende optimale Verkaufsrate λ^* in feedback Form zulässig und gegeben durch, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq N$,

$$p^*(t, x) = \begin{cases} c(t)/v + 1/\varepsilon & , x \geq B(t) \\ c(t)/v + 1/\varepsilon + 1/(v \cdot d) \cdot \ln(B(t)/x) & , \text{sonst} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$w^*(t, x) = \begin{cases} v \cdot \delta / \varepsilon \cdot \beta(t) & , x \geq B(t) \\ v \cdot \delta / \varepsilon \cdot x \cdot \beta(t) / B(t) & , \text{sonst} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\text{und} \quad \lambda^*(t, x) = \begin{cases} \beta(t) & , x \geq B(t) \\ x \cdot \beta(t) / B(t) & , \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.13)$$

(ii) Für alle $0 \leq t \leq T$ und $0 \leq x \leq N$ gilt $V(t, x) = J^*(t, x)$, und das durch (2.11) und (2.12) definierte Paar von Markov Politiken ist optimal und eindeutig.

Beweis:

(i) Wir zeigen, dass die in (2.9) definierte Funktion V die partielle Differentialgleichung (2.7) im Gebiet $\Omega = \{(t, x) | 0 < t < T, 0 < x < N\}$ löst und die Randbedingungen (2.4) erfüllt. Beachte, dass für alle $0 \leq t \leq T$ die Beziehung $\lim_{x \searrow 0} V(t, x) = 0$ gilt und V stetig differenzierbar in t und x für $0 < t < T$ und $0 < x < N$ ist. In dem Gebiet Ω erfüllt V die partielle Differentialgleichung (2.7), da mit den partiellen Ableitungen (2.10)

$$\dot{V}(t, x) + \frac{\beta(t)}{d} \cdot e^{-d \cdot V'(t, x)} = \begin{cases} 0 & , x \geq B(t) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Die Randbedingungen (2.4) sind ebenfalls erfüllt:

Ist $t = T$, so ist $B(T) = 0$. Für alle $0 \leq x \leq N$ und $t = T$ gilt somit $x \geq B(T)$, und die erste Randbedingung $V(T, x) = 0$ ist stets erfüllt, da $V(T, x) = B(T)/d = 0$. Ist $0 \leq t < T$, so ist $B(t) > 0$. Für alle $t < T$ und $x = 0$ gilt dann $x < B(t)$, und die zweite Randbedingung $V(t, 0) = 0$ ist stets erfüllt, da $V(t, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} x/d \cdot \ln(e/x \cdot B(t)) = 0$.

(ii) Da V , vgl. (2.9), die partielle DGL (2.7) sowie die HJB Gleichung (2.3) mit (2.4) erfüllt, folgt die Behauptung aus dem Verifikations-Theorem siehe Bertsekas (2005), Proposition 3.2.1. Beachte, dass die nötigen Voraussetzungen erfüllt sind, da mit λ die Dynamik, vgl. (2.1), sowie der Integrand des Gewinnfunktional, vgl. (2.2), stetig differenzierbar in x sowie stetig in t, p und w ist.

Gilt $c(t) \geq -v/\varepsilon$, $0 \leq t \leq T$, so ist die das Maximum $V(t, x) = J^*(t, x)$ realisierende Markov Politik nichtnegativ, vgl. (2.11) und (2.12). Zudem gilt $V'(t, x) \geq 0$ und $v \cdot p^*(t, x) - c(t) - V'(t, x) \equiv v/\varepsilon$ für alle $0 \leq t \leq T$ und $0 \leq x \leq N$. Die Stetigkeit der ausgewerteten Kontroll- bzw. Zustandstrajektorien wird in Abschnitt 2.4 bzw. in Theorem 3.1 nachgewiesen. \square

2.4 Eigenschaften optimaler Politiken

Die folgenden Argumentationen und charakteristischen Eigenschaften der optimalen Preis-Werbepolitik deuten an auf welcher Grundidee die Herleitung der Wertefunktion im Wesentlichen beruht. Die Lösungsformeln des Theorems belegen dabei die verschiedenen Plausibilitätsüberlegungen.

Das Verkaufsmodell mit exponentieller Nachfrage, vgl. Abschnitt 2.1 oder auch Gallego, van Ryzin (1994), hat die Eigenschaft, dass der preisabhängige Faktor der Nachfragerate $e^{-\varepsilon p}$ beschränkt ist. Da zunehmende Werbeausgaben kostspielig sind, und lediglich einer abnehmenden Wirkung gegenüberstehen, kann intuitiv davon ausgegangen, dass optimale Werberaten ebenfalls beschränkt sind. Somit liegt es nahe, dass eine optimale Preis-Werbepolitik nicht beliebig große Mengen über den endlichen Planungshorizont verkauft, d.h. nicht immer ein Ausverkauf stattfindet.

Die Situationen, in denen es optimal ist nicht alles zu verkaufen, bezeichnen wir als „Überbestand“ bzw. abkürzend (OC) (abgeleitet von „Overage Case“); sie sind dadurch charakterisiert, dass die Opportunitätskosten null sind, d.h. eine zusätzliche Verkaufseinheit keinen zusätzlichen Nutzen einbringt. Dass in derartigen Überbestandssituationen die optimale Politik sowie die Wertefunktion unabhängig vom Bestand ist, spiegelt sich in den Formeln (2.9) - (2.13) aus Theorem 2.1 wieder.

Die optimale Überbestandspolitik, bezeichnet mit $p^{OC}(t)$ und $w^{OC}(t)$ hängt nicht explizit von x ab und ist für alle t durch die Maximierung des Integranden im Gewinnfunktional (2.2) charakterisiert. Sie korrespondiert dadurch direkt mit dem stationären (nicht dynamischen) Fall, $0 \leq t \leq T$,

$$(p^{OC}(t), w^{OC}(t)) = \arg \max_{p, w \geq 0} \{ \lambda(t, p, w) \cdot (v \cdot p - c(t)) - k(t) \cdot w \}.$$

Mit der Optimalitätsbedingung für Werbung erhalten wir (siehe Anhang) den Bruttopreispfad

$$p^{OC}(t) := \arg \max_{p \geq 0} \left\{ \left((v \cdot p - c(t)) \cdot \frac{\varepsilon}{v \cdot \delta} - 1 \right) \cdot e^{\frac{-\varepsilon}{v \cdot (1-\delta)} (v \cdot p - c(t))} \right\} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{c(t)}{v}. \quad (2.14)$$

Daraus folgt, dass der Nettopreis

$$\tilde{p}^{OC}(t) := v \cdot p^{OC}(t) - c(t) = v / \varepsilon \quad (2.15)$$

im Überbestand zeitunabhängig ist! Für den optimalen Werberatenpfad im Überbestand ergibt sich mit (2.5) $w^{OC}(t) := v \cdot \delta / (k(t) \cdot \varepsilon) \cdot \beta(t)$. Die bestandsunabhängige Überbestandspolitik impliziert damit die optimale Verkaufsrate $\lambda(s, p^{OC}(s), w^{OC}(s)) = \beta(s)$; d.h. im Zeitintervall $[t, T]$ werden exakt

$$B(t) = \int_t^T \beta(s) ds$$

Einheiten verkauft. Die Funktion $B(t)$ erlaubt somit in allen Zeitpunkten t die präzise Definition von Überbestand, d.h. $x \geq B(t)$, und Unterbestand, d.h. $x < B(t)$, vgl. Theorem 2.1.

Der optimalen Politik im Unterbestand (UC) (von „Underage Case“) liegt die folgende Idee bzw. Intuition zugrunde: Wir nehmen an, dass für jedes Intervall $[t, T]$ und jeden Zustand $x < B(t)$ ein optimal gesteuertes System den Ausverkauf exakt im Endzeitpunkt T realisiert. Des Weiteren lässt sich das zeitinhomogene Preis-Werbemodell in ein reines Preismodell, vgl. (2.5), bzw. durch eine weitere Preisvariablentransformation, vgl. (2.15), in ein äquivalentes reines Preismodell mit zeitinhomogener Ankunftsintensität und *zeithomogenem* Auszahlungsfunktional überführen. Für solch spezielle Modelle weisen Gallego, van Ryzin (1994), Abschnitt 5.2, mittels einer Zeittransformation nach, dass optimale Preistrajektorien konstant sind.

Mit den beiden im letzten Paragraph erwähnten Struktureigenschaften an eine optimale Unterbestandspreistrajektorie, d.h. (i) Ausverkauf in T und (ii) einem konstanten Nettopreis \tilde{p}^{UC} , lassen sich für alle $0 \leq t < T$ und $0 < x \leq N$ optimale Kontrollen eindeutig bestimmen. Unter Ausnutzung der eins zu eins Beziehung von optimalen Bruttopreisen p^{UC} und Werberaten w^{UC} , vgl. (2.5), sowie der Beziehung zwischen konstanten Nettopreisen $\tilde{p}^{UC}(\cdot; t, x) \equiv \text{const}$ (gegeben Zustand x in t) und assoziierten Bruttopreisen $p^{UC}(s; t, x) = (\tilde{p}^{UC}(\cdot; t, x) + c(s)) / v$ setzen wir den vollständigen Verkauf von x Einheiten im Zeitintervall $[t, T]$ an, d.h. wir fordern

$$\begin{aligned} & \int_t^T \lambda(s, p^{UC}(s; t, x), w^{UC}(s; t, x)) ds \stackrel{!}{=} x \\ \Leftrightarrow & \int_t^T a(s) \cdot \underbrace{\left(\frac{a(s) \cdot v \cdot \delta}{k(s) \cdot \varepsilon} \cdot e^{-\varepsilon \cdot p^{UC}(s; t, x)} \right)^{\delta/(1-\delta)}}_{w^{UC}(s; t, x)^\delta} \cdot e^{-\varepsilon \cdot p^{UC}(s; t, x)} ds \stackrel{!}{=} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\frac{v \cdot \delta}{\varepsilon} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \int_t^T \left(\frac{a(s)}{k(s)^\delta} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot e^{\frac{-\varepsilon}{1-\delta} \cdot \frac{(\tilde{p}^{UC}(\cdot; t, x) + c(s))}{p^{UC}(s; t, x)} / v} ds = x. \\
&\Leftrightarrow e^{\frac{-\varepsilon}{v \cdot (1-\delta)} \tilde{p}^{UC}(\cdot; t, x)} \cdot \left(\frac{v \cdot \delta}{\varepsilon} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \int_t^T \left(\frac{a(s)}{k(s)^\delta} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot e^{\frac{-\varepsilon}{v \cdot (1-\delta)} \cdot c(s)} ds = x. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Für gegebene t und x liefert Beziehung (2.16) und die Beziehung Definition $B(t)$ den optimalen auf $[t, T)$ konstanten Nettopreis

$$\tilde{p}^{UC}(\cdot; t, x) = \frac{v}{\varepsilon} + \frac{v \cdot (1-\delta)}{\varepsilon} \cdot \ln \left(\frac{B(t)}{x} \right).$$

Der assoziierte zeitabhängige optimale Bruttopreis und die optimale Werberaten (open loop) lauten, $0 \leq t \leq s < T$, $0 < x \leq N$,

$$p^{UC}(s; t, x) = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{c(s)}{v}}_{p^{OC}(s)} + \frac{1-\delta}{\varepsilon} \cdot \ln \left(\frac{B(t)}{x} \right) \quad \text{und} \quad w^{UC}(s; t, x) = \frac{v \cdot \delta}{k(s) \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\beta(s)}{B(t)} \cdot x.$$

Während konstante Produktionskosten, d.h. $c(t) \equiv c$, bereits zeitunabhängige Bruttopreise implizieren, sind die optimalen Werberaten nur konstant, wenn zusätzlich auch $a(t) \equiv a$ und $k(t) \equiv k$ konstant sind. Darüber hinaus gilt für alle t und x die Beziehung $p^{UC} \geq p^{OC}$ bzw. $w^{UC} \leq w^{OC}$ genau dann, wenn $x < B(t)$ ist. Schließlich lassen sich die optimalen open loop Kontrollen schreiben als, $0 \leq t \leq s < T$, $0 < x \leq N$,

$$p^*(s; t, x) = \max(p^{OC}(s; t), p^{UC}(s; t, x)) \quad \text{und} \quad w^*(s; t, x) = \min(w^{OC}(s; t), w^{UC}(s; t, x)).$$

Die Wertefunktion kann man dann durch Auswertung der optimalen open loop Kontrollen mit

$$V(t, x) = \int_t^T a(s) \cdot e^{-\varepsilon p^*(s; t, x)} \cdot w^*(s; t, x)^\delta \cdot (v \cdot p^*(s; t, x) - c(s)) ds - \int_t^T k(s) \cdot w^*(s; t, x) ds,$$

explizit berechnen. Die Ergebnisse führen auf die Formeln, welche in Theorem 2.1 angegeben sind. Am Ende dieses Abschnitts halten wir die folgenden wichtigen Fakten fest.

Bemerkung 2.1.

- (i) Im Gegensatz zum Fall mit isoelastischer Nachfrage, vgl. Kapitel 1 und 2, ist die Wertefunktion keine separable Funktion der Zeit und des Bestandes.
- (ii) Für den Spezialfall $\delta = 0$ liefert Theorem 2.1 die Lösungsformeln für das reine Preismodell.
- (iii) In Abhängigkeit der Relation von x und $B(t)$ befindet sich das System im Über- bzw. Unterbestand. Während im Überbestand die stationäre Politik und ein positiver Restbestand charakteristisch sind, ist im Unterbestand ein Ausverkauf exakt im Endzeitpunkt optimal.

- (iv) Während der optimale Bruttopreis $\bar{p}(t) := p^*(t, x(t))$ i.A. zeitabhängig ist, so ist der korrespondierende optimale Nettopreis $\tilde{p}(t) := v \cdot \bar{p}(t) - c(t)$ zeitunabhängig.
- (v) Ist das System zum Beginn der Verkaufsperiode im Über- bzw. Unterbestand, d.h. $x \geq B(t)$ bzw. $x < B(t)$, so verbleibt das optimal gesteuerte System $x^*(s)$, $0 \leq t \leq s < T$, die gesamte Verkaufsperiode im Über- bzw. Unterbestand, $x^*(s) \geq B(s)$ bzw. $x^*(s) < B(s)$.

3 Open Loop Lösung

In diesem Abschnitt wollen wir optimal gesteuerte Verkaufsprozesse genauer auswerten. Insbesondere werden wir dabei die optimale Bestandstrajektorie bestimmen. Neben optimalen Preisen und Werberaten können so auch optimale akkumulierte Umsätze, Produktionskosten und Werbeausgaben als Funktion der Zeit ausgedrückt werden. Die expliziten Lösungsformeln können leicht ausgewertet und für Sensitivitätsstudien genutzt werden. Die Ergebnisse bieten die Möglichkeit qualitative und quantitative Handlungsempfehlungen zu geben.

Aus der expliziten (feedback) Formel für optimale Verkaufsraten im Über- und Unterbestand, vgl. Theorem 2.1, (2.13), folgt in Verbindung mit der Dynamik (2.1), dass die Bestandstrajektorie des optimal gesteuerten deterministischen Marketing-Mix Problems ausgehend vom Zustand N in $t = 0$ die Differentialgleichung, $0 \leq t < T$, $0 < N < \infty$,

$$\dot{x}(t) = -\lambda^*(t, x(t)) = \begin{cases} \dot{B}(t) & , x(t) \geq B(t) \\ x(t) \cdot \frac{\dot{B}(t)}{B(t)} & , x(t) < B(t) \end{cases}, \quad x(0) = N, \quad (3.1)$$

erfüllt, wobei $\dot{B}(t) = -\beta(t)$, vgl. (2.8), gilt. Als Lösung der Differentialgleichung (3.1) ist die optimale Bestandstrajektorie somit beschrieben durch, $0 \leq t \leq T$, $0 < N < \infty$,

$$x(t) = \begin{cases} N - B(0) + B(t) & , N \geq B(0) \\ N \cdot \frac{B(t)}{B(0)} & , N < B(0) \end{cases}. \quad (3.2)$$

Auf Basis der optimalen Bestandsentwicklung können wir die Lösungsformeln aus Theorem 2.1 als Funktion der Zeit auswerten. In dieser open loop Form lautet die optimale Preistrajektorie etwa $\bar{p}(t) := p^*(t, x(t))$, $0 \leq t \leq T$; die Größen $\bar{w}(t)$, $\bar{\lambda}(t)$ und $\bar{V}(t)$ sind in gleicher Weise definiert. Darüber hinaus sind wir in der Lage die entsprechenden Formeln für die (optimalen) ab dem Zeitpunkt t verbleibenden Werbeausgaben $\bar{W}(t)$ sowie die Nettoumsätze $\bar{U}(t)$, definiert durch

$$\bar{W}(t) := \int_t^T k(s) \cdot \bar{w}(s) \, ds \quad \text{und} \quad \bar{U}(t) := \int_t^T (v \cdot \bar{p}(s) - c(s)) \cdot \bar{\lambda}(s) \, ds,$$

explizit anzugeben. Per Definition gilt die Identität $\bar{V}(t) = \bar{U}(t) - \bar{W}(t)$, d.h. „Gewinne gleich Umsatz abzüglich Werbekosten“. Die Produktionskosten sind bereits mit den Bruttoumsätzen verrechnet, können aber ebenfalls gesondert berechnet werden. Die resultierenden open loop Formeln der genannten Größen sind im nächsten Theorem zusammengefasst.

Theorem 3.1. Die charakteristischen Größen des deterministischen Kontrollproblems sind in open loop Form, ausgehend vom Startzustand $(0, N)$, gegeben durch, $0 \leq t \leq T$, $0 < N < \infty$, $c(t) \geq -v/\varepsilon$,

Preise	$\bar{p}(t) = \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1-\delta}{\varepsilon} \cdot \ln \left(\frac{B(0)}{N \wedge B(0)} \right)$
Werberaten	$\bar{w}(t) = \frac{v \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \beta(t) \cdot \frac{N \wedge B(0)}{B(0)}$
Verkaufsrate	$\bar{\lambda}(t) = \beta(t) \cdot \frac{N \wedge B(0)}{B(0)}$
zukünftige Gewinne	$\bar{V}(t) = \frac{B(t)}{d} \cdot \frac{N \wedge B(0)}{B(0)} \cdot \ln \left(e \cdot \frac{B(0)}{N \wedge B(0)} \right)$
zukünftige Werbeausgaben	$\bar{W}(t) = \frac{v \cdot \delta}{\varepsilon} \cdot B(t) \cdot \frac{N \wedge B(0)}{B(0)}$
zukünftige Umsätze	$\bar{U}(t) = \left((1-\delta) \cdot \ln \left(e \cdot \frac{B(0)}{N \wedge B(0)} \right) + \delta \right) \cdot \frac{v}{\varepsilon} \cdot B(t) \cdot \frac{N \wedge B(0)}{B(0)}.$

Beweis: Nutze die Formeln aus Theorem 2.1 in Verbindung mit dem Bestandspfad (3.2).

Die Formeln des Theorems 3.1 geben bereits einen gewissen Aufschluss über die Struktur der Lösung des Modells. Der Verlauf des optimalen Preispfades ist im Wesentlichen durch die Produktionskosten geprägt; die Funktion $\beta(t)$ geht nur in integrierter Form als $B(0)$ in die Preisformel ein und bestimmt damit, wie die verschiedenen Konstanten des Modells, nur das Preisniveau.

Im Gegensatz dazu sind die Werberate und die Verkaufsrate durch den spezifischen Verlauf von $\beta(t)$ charakterisiert, wobei die Verkaufsrate proportional zu $\beta(t)$ und die Werberaten proportional zu $\beta(t)/k(t)$ sind. Die Größen Gewinn, Umsatz und Werbeausgaben hängen linear von der Funktion $B(t)$ ab, welche im weitesten Sinne als verbleibendes zukünftiges Nachfragepotential interpretiert werden kann.

Um die Eigenschaften der optimalen Modelllösung im Über- und Unterbestand zu illustrieren betrachten wir im Folgenden ein Beispiel mit (linear) fallender Intensität $a(t)$ und einer (linear) fallenden Produktionskostenfunktion $c(t)$. Des Weiteren betrachten wir bei einem Potential von $B(0)=1.76$ vier verschiedene Anfangsbestände $N=\{0.5, 1, 1.76, 2.2\}$, so dass neben zwei Unterbestandsfällen, einem Überbestandsfall auch das Grenzszenario $N=B(0)$ enthalten ist.

Im Grenzszenario ist der optimale Bestandspfad gegeben durch $x_{krit}(t) := B(t)$, vgl. (3.2). Für alle Überbestandsfälle, d.h. $N > B(0)$, sind die optimalen Bestandstrajektorien um den Wert $N - B(0)$ verschobene Versionen von x_{krit} . Im Unterbestand, d.h. wenn $N < B(0)$, sind die optimalen Pfade $x(t)$ proportional zu $B(t)$ und damit eine um den Faktor $N/B(0)$ gestauchte Version von x_{krit} .

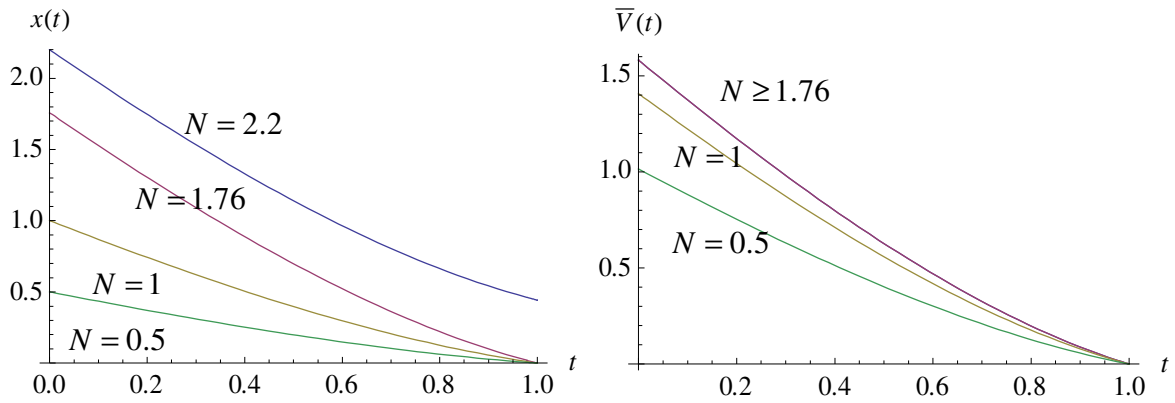


Abbildung 1. Optimale Bestandspfade (links) und ausstehende Gewinne (rechts) für Anfangsbestände $N = \{0.5, 1, 1.76, 2.2\}$, d.h. Über- und Unterbestände ($T=1$, $a(t) = 20 - 15 \cdot t$, $c(t) = 1 - 0.5 \cdot t/T$, $\varepsilon = k = v = 1$, $\delta = 0.1$; $B(0) = 1.76$)

Für die vier verschiedenen Anfangsbestände sind in Abb. 1a die optimalen Bestandstrajektorien $x(t)$ abgebildet. Die konvexe Form der vier Kurven deutet darauf hin, dass es im betrachteten Beispiel optimal ist die Verkaufsgeschwindigkeit im Laufe der Zeit etwas zu reduzieren. Das rechte Fenster, Abb. 1b, zeigt die Entwicklung der zukünftigen Gewinne und gibt damit gleichzeitig Aufschluss über die durch $\bar{V}(0) - \bar{V}(t)$ beschriebene Gewinnakkumulation. Erwartungsgemäß fallen die Kurven der Wertefunktionen $\bar{V}(t)$ im Über- und Grenzbestand zusammen, da in diesen Fällen exakt $B(0)$ Einheiten auf die gleiche Weise verkauft werden.

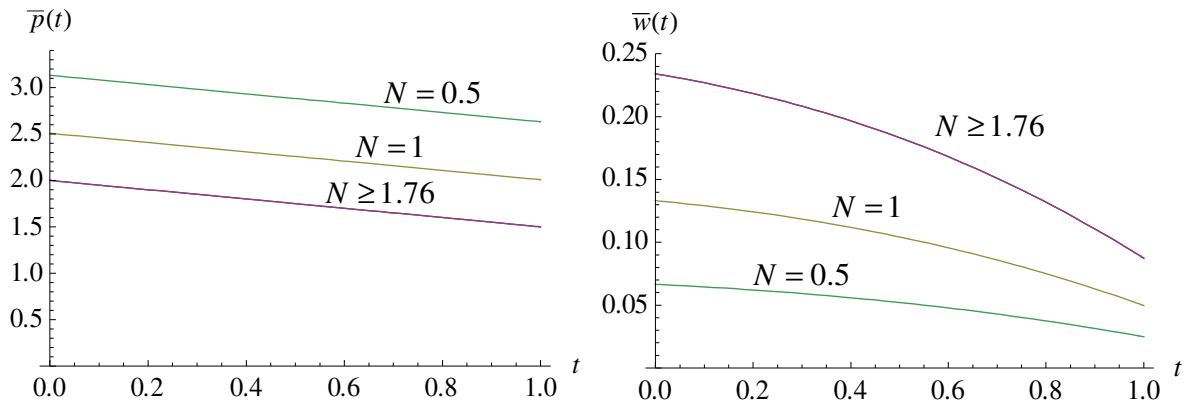


Abbildung 2. Optimale Preisentwicklung (linkes Fenster) und Werberaten (rechtes Fenster) ($T=1$, $a(t) = 20 - 15 \cdot t$, $c(t) = 1 - 0.5 \cdot t/T$, $\varepsilon = k = v = 1$, $\delta = 0.1$; $B(0) = 1.76$)

Für das gleiche Beispiel zeigt Abb. 2 die optimalen open loop Kontrollen für die verschiedenen Anfangsbestände N . Fenster 2a zeigt die optimalen Preispfade, welche aufgrund der Struktur der Produktionskostenfunktion linear in der Zeit fallen. Die in Fenster 2b illustrierten Verläufe optimaler Werberaten zeigen eine konvex fallende Charakteristik. Die Preis- bzw. Werbepolitik ist im Grenz- und im Überbestandsfall identisch und liefert untere bzw. obere Schranken. Im Unterbestand fällt das Preisniveau im Bestand N , während das Niveau der Werberaten in N steigt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts nutzen wir die expliziten Formeln aus Theorem 3.1, um die qualitative Abhängigkeit charakteristischer Größen von den verschiedenen Modellparametern zu erfassen. Dabei beschränken wir uns auf den zeithomogenen Fall, d.h. die Parameter a , k und c sind zeitunabhängig, und es gilt $B(t) = \beta \cdot (T - t)$.

Tabelle 1 fasst die Resultate im Überbestand zusammen; Tabelle 2 behandelt den Unterbestandsfall. Die in beiden Tabellen enthaltenen Symbole “+”, “0” und “–” deuten an, ob die in der ersten Spalte aufgeführten Größen steigen, konstant bleiben oder fallen, wenn die in der ersten Zeile aufgeführten Variablen steigen. Steigt beispielsweise im Überbestand das Niveau der Produktionskosten, so steigt der Preis; die übrigen Größen fallen in c .

Überbestand $N \geq B(0)$	N	t	ε	c	a	v	k
$\bar{p}(t) = c / v + 1 / \varepsilon$	0	0	–	+	0	–	0
$\bar{w}(t) = v \cdot \delta / (k \cdot \varepsilon) \cdot \beta$	0	0	–	–	+	+	–
$\bar{\lambda}(t) = \beta$	0	0	–	–	+	+	–
$\bar{V}(t) = v \cdot (1 - \delta) / \varepsilon \cdot \beta \cdot (T - t)$	0	–	–	–	+	+	–
$\bar{W}(t) = v \cdot \delta / \varepsilon \cdot \beta \cdot (T - t)$	0	–	–	–	+	+	–
$\bar{U}(t) = v / \varepsilon \cdot \beta \cdot (T - t)$	0	–	–	–	+	+	–

Tabelle 1. Sensitivität verschiedener open loop Größen im *Überbestand*
zeithomogener Fall; $x(t) = N - t \cdot \beta$

Im Unterbestand erhalten wir andere Ergebnisse, vgl. Tabelle 2. Im zeithomogenen Fall fällt das Preisniveau in den Parametern N , ε und k ; es ist unabhängig von c und steigt in a und v . Die optimalen Werberaten fallen in ε und k ; sie sind konstant in t , c und a und steigen in N und v . Da β nicht monoton in δ ist, können keine entsprechenden allgemeinen Aussagen für die Werbeelastizität δ gegeben werden.

Unterbestand $N < B(0)$	N	t	ε	c	a	v	k
$\bar{p}(t) = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1 - \delta}{\varepsilon} \cdot \ln \left(\frac{T}{e \cdot N} \cdot \left(\frac{v \cdot \delta \cdot a^{1/\delta}}{\varepsilon \cdot e \cdot k} \right)^{\delta/(1-\delta)} \right)$	–	0	–	0	+	+	–
$\bar{w}(t) = v \cdot \delta / (k \cdot \varepsilon) \cdot N / T$	+	0	–	0	0	+	–
$\bar{\lambda}(t) = N / T$	+	0	0	0	0	0	0
$\bar{V}(t) = \frac{v \cdot (1 - \delta)}{\varepsilon} \cdot \frac{T - t}{T} \cdot N \cdot \ln \left(e \cdot \beta \cdot \frac{T}{N} \right)$	+	–	–	–	+	+	–
$\bar{W}(t) = v \cdot \delta / \varepsilon \cdot t / T \cdot N$	+	–	–	0	0	–	0
$\bar{U}(t) = \left((1 - \delta) \cdot \ln \left(e \cdot \beta \cdot \frac{T}{N} \right) + \delta \right) \cdot \frac{v}{\varepsilon} \cdot \frac{T - t}{T} \cdot N$	+	–	–	–	+	+	–

Tabelle 2. Sensitivität verschiedener open loop Größen im *Unterbestand*
zeithomogener Fall; $x(t) = N \cdot (1 - t / T)$

Im nächsten Abschnitt zeigen wir wie die hergeleitete parameterabhängige Lösung genutzt werden kann, um das monopolistische Verkaufsmodells im Kontext sozialer Effizienz und verschiedener Besteuerungsmechanismen zu untersuchen.

4 Soziale Effizienz

Durch die zusätzliche Betrachtung der Konsumentenrente wollen wir in diesem Abschnitt untersuchen wann optimale monopolistische Strategien sozial effizient sind und welche Rolle dabei der Anfangsbestand auf der einen sowie die Endogenisierung der Werbung auf der anderen Seite spielen.

Im Kontext der sozialen Effizienz ist bereits bekannt, dass im stochastischen reinen Preismodell mit exponentieller Nachfrage (vgl. McAfee, te Velde (2006)) und im isoelastischen Nachfragemodell mit endogener Werbung und ohne Produktionskosten (vgl. Kapitel 1) die optimale Lösung i.A. *nicht* effizient ist. Im Gegensatz dazu ist im stochastischen isoelastischen reinen Preismodell ohne Produktionskosten die optimale Lösung *immer* sozial effizient, siehe McAfee, te Velde (2008).

Des Weiteren wollen wir in Anlehnung an Kapitel 1 durch die Anpassung der Modellparameter v und k Subventions- und Besteuerungsmechanismen identifizieren, welche geeignet sind, um soziale Effizienz herzustellen; wir nehmen dabei an, dass der Monopolist rational handelt. Als zusätzliche Steuergröße kommt in unserem Modell der Produktionskostenparameter c hinzu. Die Berechnung assoziierter Transferkosten ermöglicht es insbesondere auch selbstfinanzierende Anpassungen zu bestimmen.

4.1 Effiziente Anpassungen

Um die soziale Effizienz von Preis-Werbestrategien in unserem Modell analysieren zu können, untersuchen wir eine Modifikation des in Abschnitt 2 beschriebenen Modells, welches auf die Maximierung der Wohlfahrt als Summe von Produzentenrente (PS) und Konsumentenrente (CS) abzielt. Wie in den letzten beiden Abschnitten ist die Produzentenrente gegeben durch $PS(t, p) = v \cdot p - c(t)$. Die Summe aus Angebotspreis p und der preisabhängigen Konsumentenrente $CS(p)$ ist für alle Zeitpunkte $0 \leq t \leq T$ und Preise $p \geq 0$ definiert durch die Beziehung

$$p + CS(p) := \int_p^\infty \frac{z \cdot \varepsilon \cdot e^{-\varepsilon z}}{e^{-\varepsilon p}} dz = p + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die Konsumentenrente ist somit preisunabhängig und gegeben durch $CS(p) = 1/\varepsilon$; sie korrespondiert mit der im stochastischen Modell erwarteten Spanne zwischen exponentialverteilten Reservationspreisen und dem Angebotspreis p . Die Maximierung der Wohlfahrt, beschrieben durch $V_{soc}(0, N)$, ist daher - analog zu Abschnitt 2 - assoziiert mit der HJB Gleichung, vgl. (2.3),

$$\begin{aligned} -\dot{V}_{soc}(t, x) &= \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ \lambda(t, p, w) \cdot (PS(t, p) + CS(p) - V'_{soc}(t, x)) - k(t) \cdot w \right\} \\ &= \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ a(t) \cdot w^\delta \cdot e^{-\varepsilon p} \cdot (v \cdot p - (c(t) - \varepsilon^{-1}) - V'_{soc}(t, x) - k(t) \cdot w) \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

wobei die Wertefunktion V_{soc} nun den zukünftigen Wohlfahrtsgewinn für alle Zeitpunkte t und Zustände x beschreibt. Die natürlichen Randbedingungen lauten analog zu (2.4) $V_{soc}(T, x) = 0$, $0 \leq x \leq N$, und $V_{soc}(t, 0) = 0$, $0 \leq t \leq T$.

Offenbar unterscheidet sich Gleichung (4.1) lediglich in den Produktionskosten von der zum Monopolproblem gehörenden Gleichung (2.3). Aufgrund der identischen Struktur beider Probleme können wir die in Abschnitt 2 und 3 konstruierte Lösung unter Beachtung der Zulässigkeit von Strategien auf das Wohlfahrtsproblem übertragen. Letzteres ist dabei äquivalent zum Monopolproblem mit veränderten Produktionskosten $c_{soc}(t) := c(t) - \varepsilon^{-1}$ anstelle von $c(t)$, siehe auch McAfee, te Velde (2006), Abschnitt 5.

In diesem Zusammenhang charakterisieren wir das Monopolproblem mit dem Tripel $(v_{mon}, k_{mon}, c_{mon}) := (v, k, c)$ und das Wohlfahrtsproblem mit dem Tripel $(v_{soc}, k_{soc}, c_{soc}) := (v, k, c - \varepsilon^{-1})$. Für eine beliebige geeignete Problemcharakterisierung, parametrisiert durch $(\tilde{v}, \tilde{k}, \tilde{c})$, lauten nach Theorem 3.1 die optimalen open loop Kontrollen $\tilde{p}^*(t)$ und $\tilde{w}^*(t)$ sowie das Potential $\tilde{B}(t)$, $0 \leq t \leq T$, $0 < N < \infty$,

$$\tilde{p}^*(t) = \max \left(\frac{\tilde{c}(t)}{\tilde{v}} + \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1-\delta}{\varepsilon} \cdot \ln \left(\left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \int_t^T \left(\frac{a(s) \cdot \tilde{v}^\delta}{\tilde{k}(s)^\delta} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot e^{\frac{-\varepsilon}{1-\delta} \left(\frac{\tilde{c}(s) - \tilde{c}(t)}{\tilde{v}} \right)} ds \right) \right)$$

$$\text{und} \quad \tilde{w}^*(t) = \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{k}(t)} \cdot \frac{\delta \cdot a(t)}{\varepsilon} \cdot e^{-\varepsilon \cdot \tilde{p}^*(t)} \right)^{1/(1-\delta)}, \quad \tilde{B}(t) := \int_t^T e^{\frac{-\varepsilon \tilde{c}(s)}{\tilde{v} \cdot (1-\delta)}} \cdot \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{\tilde{v} \cdot \delta}{\varepsilon \cdot e} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{a(s)}{\tilde{k}(s)^\delta} \right)^{1/(1-\delta)} ds.$$

Bemerkung 4.1. Wir halten fest, dass bzgl. der Problemcharakterisierung $(\tilde{v}, \tilde{k}, \tilde{c})$ die Kontrollen $\tilde{p}^*(t)$, $\tilde{w}^*(t)$ vom Verhältnis $\tilde{v}/\tilde{k}(t)$ abhängen. Des Weiteren ist die Politik im Überbestand ($N \geq \tilde{B}$) durch $\tilde{c}(t)/\tilde{v}$ und im Unterbestand ($N < \tilde{B}$) durch $(\tilde{c}(s) - \tilde{c}(t))/\tilde{v}$, $0 \leq t \leq s \leq T$, bestimmt. Das Potential $\tilde{B}(t)$, welches Über- und Unterbestand abgrenzt, ist ebenfalls eine Funktion von $\tilde{v}/\tilde{k}(t)$ und $\tilde{c}(t)/\tilde{v}$.

Im Folgenden wollen wir nun Anpassungsmechanismen, charakterisiert durch $(v_{adj}, k_{adj}, c_{adj})$, finden, unter welchen die assoziierte angepasste Politik $(p_{adj}(t), w_{adj}(t))$ eines optimal agierenden Monopolisten genau der sozial effizienten Politik $(p_{soc}(t), w_{soc}(t))$ entspricht, welche durch $(v_{soc}, k_{soc}, c_{soc})$ charakterisiert ist. In der nächsten Proposition formulieren wir hinreichende Bedingungen für Anpassungen $(v_{adj}, k_{adj}, c_{adj})$, so dass $(p_{adj}(t), w_{adj}(t)) = (p_{soc}(t), w_{soc}(t))$ gilt. Darüber hinaus geben wir an, in welchen Fällen bereits die unregulierte Monopolpolitik, vgl. den Fall $(v_{mon}, k_{mon}, c_{mon})$, effizient ist.

Proposition 4.1.

- (i) Für ein gegebenes Tripel (v, k, c) ist die auf der Anpassung $(v_{adj}, k_{adj}, c_{adj})$ basierende optimale Monopolpolitik für alle N sozial effizient, wenn die Parameter die Bedingung, $v_{adj} > 0$,

$$(v_{adj}, k_{adj}(t), c_{adj}(t)) = v_{adj} \cdot \left(1, \frac{k_{soc}(t)}{v_{soc}}, \frac{c_{soc}(t)}{v_{soc}} \right) = v_{adj} \cdot \left(1, \frac{k(t)}{v}, \frac{c(t) - \varepsilon^{-1}}{v} \right), \quad (4.2)$$

erfüllen. Diese Menge proportionaler Anpassungen hat den Freiheitsgrad eins. Die Anpassungen (4.2) implizieren zudem $B_{adj} = B_{soc} > B_{mon}$.

- (ii) Im sozialen Unterbestandsfall, d.h. wenn $N \leq B_{soc}(0)$, ist die Menge möglicher Anpassungen $(v_{adj}, k_{adj}, c_{adj})$ in Verbindung mit der Produktionskostensubvention q gegeben durch

$$\frac{v_{adj}}{k_{adj}(t)} = \frac{v}{k(t)} \quad \text{und} \quad c_{adj}(t) \equiv c(t) - q, \quad (4.3)$$

wobei $v_{adj} > 0$ und $q \leq c(t) + v/\varepsilon$ für alle $0 \leq t \leq T$ ist und $B_{adj}(0) \geq N$ gilt.

- (iii) Ist $c(t) \equiv c$ zeitunabhängig, dann sind effiziente Anpassungen für alle N gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{wenn } N \geq B_{soc}(0): \quad & \frac{c_{adj}}{v_{adj}} = \frac{c - \varepsilon^{-1}}{v} \quad \text{und} \quad \frac{v_{adj}}{k_{adj}(t)} = \frac{v}{k(t)} \\ \text{wenn } N < B_{soc}(0): \quad & \frac{c_{adj}}{v_{adj}} < \frac{c - \varepsilon^{-1}}{v} + \frac{1 - \delta}{\varepsilon} \cdot \ln \left(\frac{B_{soc}(0)}{N} \right) \quad \text{und} \quad \frac{v_{adj}}{k_{adj}(t)} = \frac{v}{k(t)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

- (iv) Ist $N \leq B_{mon}(0)$, dann handelt der Monopolist bereits sozial effizient.
Ist $N > B_{mon}(0)$, dann handelt der Monopolist nicht sozial effizient.

Beweis.

- (i),(ii) Die Aussage ergibt sich direkt aus der Bemerkung 4.1 und einem Koeffizientenvergleich.
- (iii) Im Überbestand folgt die Behauptung aus (i). Im Unterbestand müssen v_{adj} und c_{adj} bzw. q u.a. so gewählt werden, dass sich der Monopolist im Unterbestand befindet, d.h. $B_{adj} \geq N$.
- (iv) Die unregulierte Anpassung, definiert durch $v_{adj} = v$, $k_{adj} = k$ und $c_{adj} = c$, ist sozial effizient, genau dann, wenn $N \leq B_{mon}(0) \wedge B_{soc}(0)$, siehe Bemerkung 4.1. \square

Die in (4.2) definierten proportionalen Anpassungen stellen eine einfache Möglichkeit der Anpassung dar, welche für alle Anfangsbestände zulässig ist. Die derart definierten effizienten Tripel bilden durch die freie Wahl von v_{adj} eine Linie in der (c_{adj}, v_{adj}) -Ebene.

Neben den proportionalen (4.2)-Anpassungen gibt es im Falle $N \leq B_{soc}(0)$ noch weitere Möglichkeiten der effizienten Anpassung. Die in (4.3) formulierten Anpassungen bilden einen Kegel in der (c_{adj}, v_{adj}) -Ebene. Die Anpassungen sind dabei so gewählt, dass die Monopolpolitik effizient ist und die effiziente Menge $N \wedge B_{soc}(0)$ verkauft wird. Im Falle $N \leq B_{mon}(0)$ ist die unregulierte Anpassung (v, k, c) Teil der Klasse der (4.3)-Anpassungen und führt somit zur sozial effizienten Lösung. Das bedeutet: ist der Anfangsbestand „klein“, so sind i.A. keine Anpassungen nötig.

„Große“ Anfangsbestände N werden dagegen von einem Monopolisten i.A. nicht sozial effizient verkauft. Im Falle $N > B_{mon}(0)$ kommen nur proportionale Anpassungen, vgl. (4.2), in Frage, welche auf einer Produktionskostensubvention basieren. Ist $c(t) > \varepsilon^{-1}$ oder $c(t) = \varepsilon^{-1}$ so bleiben die angepassten Produktionskosten c_{adj} positiv bzw. sind gleich null. In Abhängigkeit der Wahl von $v_{adj} > 0$ sind die angepassten Produktionskosten größer oder kleiner als die ursprünglichen Produktionskosten c . Im Sonderfall $c(t) < \varepsilon^{-1}$ führt eine proportional Anpassung auf negative c_{adj} , d.h. es wird ein Verkaufsbonus eingeräumt. Es sei darauf hingewiesen, dass die optimalen Kontrollen zulässig bleiben solange $c_{adj} \geq -v/\varepsilon$ gilt, vgl. Theorem 2.1.

4.2 Transferkosten und selbstfinanzierende Anpassungen

In diesem Abschnitt bestimmen wir die mit den Subventions- und Besteuerungsmechanismen einhergehenden Transferkosten und gehen der Frage nach wie selbstfinanzierende Anpassungen gefunden werden können. Für jede effiziente Anpassung, vgl. (4.2) und (4.3), ist der Gesamtgewinn des Monopolisten (TPS) und die optimale Gesamtrente der Konsumenten (TCS_{soc}) gegeben durch

$$TPS_{adj} := V_{adj}(0, N) \quad \text{und} \quad TCS_{soc} := \varepsilon^{-1} \cdot (B_{soc}(0) \wedge N).$$

Die Formel für TCS_{soc} ergibt sich aus der Konsumentenrente pro verkaufter Einheit und der in sozial effizienten Lösungen gehandelten Menge $N \wedge B_{soc}$. Letztere wird für alle effizienten Anpassungen $(v_{adj}, k_{adj}, c_{adj})$ verkauft, da nach Konstruktion $w_{adj}^*(t) \equiv w_{soc}^*(t)$, $p_{adj}^*(t) \equiv p_{soc}^*(t)$ und $\lambda_{adj}^*(t) \equiv \lambda_{soc}^*(t)$ gilt. Beachte, dass TPS_{adj} im Gegensatz zu TCS_{soc} von der Wahl der spezifischen Anpassung abhängt. Je nach Wahl von v_{adj} und c_{adj} entstehen der Gesellschaft Umsatz-Transferkosten UTR_{adj} ; die Höhe der Werbe-Transferkosten WTR_{adj} ist bestimmt durch k_{adj} . Wir erhalten

$$UTR_{adj} := \int_0^T \left((v_{adj} - v) \cdot p_{soc}^*(t) - (c_{adj}(t) - c(t)) \right) \cdot \lambda_{soc}^*(t) dt = U_{adj} - U_{soc} + TCS_{soc} \quad (4.5)$$

$$\text{und} \quad WTR_{adj} := \int_0^T \left(k(t) - k_{adj}(t) \right) \cdot w_{soc}^*(t) dt = -W_{adj} + W_{soc}. \quad (4.6)$$

Mit $TR_{adj} := UTR_{adj} + WTR_{adj}$ bezeichnen wir im Folgenden die Gesamt-Transferkosten. Aus (4.5) und (4.6) folgt, dass sich die Wohlfahrt V_{soc} aus Gesamt-Produzenten- und

Konsumentenrente abzüglich der Transferkosten zusammensetzt und die “Balance Gleichung”

$$TCS_{soc} + TPS_{adj} - TR_{adj} \equiv V_{soc}. \quad (4.7)$$

gilt. Eine selbstfinanzierende sozial effiziente Anpassung $(v_{adj}^{(0)}, k_{adj}^{(0)}, c_{adj}^{(0)})$ ist charakterisiert durch $TR_{adj} = 0$, d.h. die Zahlungen UTR_{adj} und WTR_{adj} gleichen sich exakt aus. Aus (4.7) folgt damit die Bedingung $V_{adj} = V_{soc} - TCS_{soc}$. Aussagen zur Charakterisierung und Existenz von selbstfinanzierenden effizienten Anpassungsmechanismen sind in der folgenden Proposition zusammengefasst.

Proposition 4.2.

- (i) Gilt $N < B_{soc}$, so erfüllt eine selbstfinanzierende effiziente (4.3)-Anpassung $(v_{adj}^{(0)}, k_{adj}^{(0)}, c_{adj}^{(0)})$ die Beziehung, $N < B_{adj}^{(0)}$,

$$e^{1/(1-\delta)} = \frac{(e \cdot B_{soc} / N)^v}{(e \cdot B_{adj}^{(0)} / N)^{v_{adj}^{(0)}}}. \quad (4.8)$$

- (ii) Gilt $N < B_{soc}$ und ist $c(t) \equiv c$ zeitunabhängig, dann ist die Menge selbstfinanzierender effizienter (4.3)-Anpassungen gekennzeichnet durch

$$v_{adj}^{(0) \text{ c hom}} = v + \frac{c_{adj}^{(0)} - c}{\frac{c - \varepsilon^{-1}}{v} + \frac{1 - \delta}{\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N}\right)} \quad \text{und} \quad c_{adj}^{(0) \text{ c hom}} > -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{v \cdot (1 - \delta)}{\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N}\right). \quad (4.9)$$

Selbstfinanzierende effiziente proportionale (4.2)-Anpassungen sind eindeutig gegeben:

- (iii) Ist $N < B_{soc}$ und $(1 - \delta) \cdot v > (1 + \ln(B_{soc} / N))^{-1}$, so gilt

$$v_{adj}^{(0)} = v - \frac{1/(1-\delta)}{\ln(e \cdot B_{soc} / N)}. \quad (4.10)$$

- (iv) Ist $N \geq B_{soc}$ und $(1 - \delta) \cdot v > 1$ so gilt

$$v_{adj}^{(0)} = v - \frac{1}{1 - \delta}. \quad (4.11)$$

- (v) Eine selbstfinanzierende effiziente Anpassung ist möglich, genau dann wenn

$$N \wedge B_{soc} < B_{soc} \cdot e^{1-1/(v(1-\delta))} \Leftrightarrow N < (e \cdot B_{mon}) \wedge B_{soc}. \quad (4.12)$$

Beweis. Siehe Anhang; nutze Theorem 3.1, Balance Gleichung (4.7) und (4.2) mit $B_{soc} = B_{adj}^{(0)}$.

Bemerkung 4.2. Die Bedingung (4.12) zeigt, dass selbstfinanzierende Anpassungen möglich sind, wenn der Bestand N und die Werbeelastizität δ „klein“ sind und der Umsatzparameter v „groß“ ist. Die Endogenisierung von Werbung erschwert somit die Regulierung, vgl. Kapitel 1.

Im Folgenden betrachten wir ein Beispiel. Für eine zeithomogene Parametrisierung illustrieren wir effiziente Anpassungen, vgl. Proposition 4.1, und selbstfinanzierende Anpassungen, vgl. Proposition 4.2. Da k_{adj} eindeutig durch v_{adj} bestimmt ist, lassen sich Anpassungen gut in der (c_{adj}, v_{adj}) -Ebene darstellen. Für verschiedene Werte c_{adj} und v_{adj} zeigt Abb. 3a die assoziierten B_{adj} Werte, d.h. die maximale Menge, die ein Monopolist verkaufen würde. Die markierten Linien L2 und L3 zeigen die Werte $B_{adj} = B_{mon} = 4.26$ und $B_{adj} = B_{soc} = 12.96$ an. Ist $N < B_{soc}$, so ist die Menge der effizienten Anpassungen durch genau die Wertpaare in der (c_{adj}, v_{adj}) -Ebene gegeben, für die $B_{adj} \geq N$ gilt, d.h. $B_{adj} = N$ stellt für gegebene N eine rechte Grenze in Abb. 3a dar. Im Fall $N \geq B_{soc}$ ist die Menge effizienter proportionaler Anpassungen durch die Linie L3 beschrieben.

Abb. 3b behandelt den Fall mit festem $N = B_{mon} = 4.26$. Die Menge der effizienten Anpassungen ist von rechts durch die Linie L2 begrenzt. Die Zulässigkeitsbedingungen $c_{adj} \geq -v/\varepsilon = -0.5$ und $v_{adj} > 0$ stellen weitere Grenzen am linken bzw. unteren Rand der (c_{adj}, v_{adj}) -Ebene dar. Für die zulässigen effizienten Anpassungen gibt Abb. 3b auch die assoziierten Transferkosten TR_{adj} an, vgl. (4.5) und (4.6); sie steigen linear in v_{adj} und c_{adj} . Die Linie L1 markiert alle selbstfinanzierenden Anpassungen, d.h. mit $TR_{adj} = 0$. Beachte, dass auch der unregulierte Punkt $(c_{adj}, v_{adj}) = (c, v) = (1, 1)$ auf L1 liegt.

Für Bestände $N > B_{mon} = 4.26$ sind effiziente Anpassungen nötig und möglich. Selbstfinanzierende Anpassungen existieren so lange $N < 12.96 \cdot e^{1-1/0.9} = 4.26 \cdot e = 11.597$ gilt, vgl. (4.12). Im reinen Preismodell, d.h. $\delta = 0$, mit $v < 1$ ist die Bedingung $(1 - \delta) \cdot v > 1$ immer erfüllt und es existieren selbstfinanzierende Anpassungen für beliebige Anfangsbestände N .

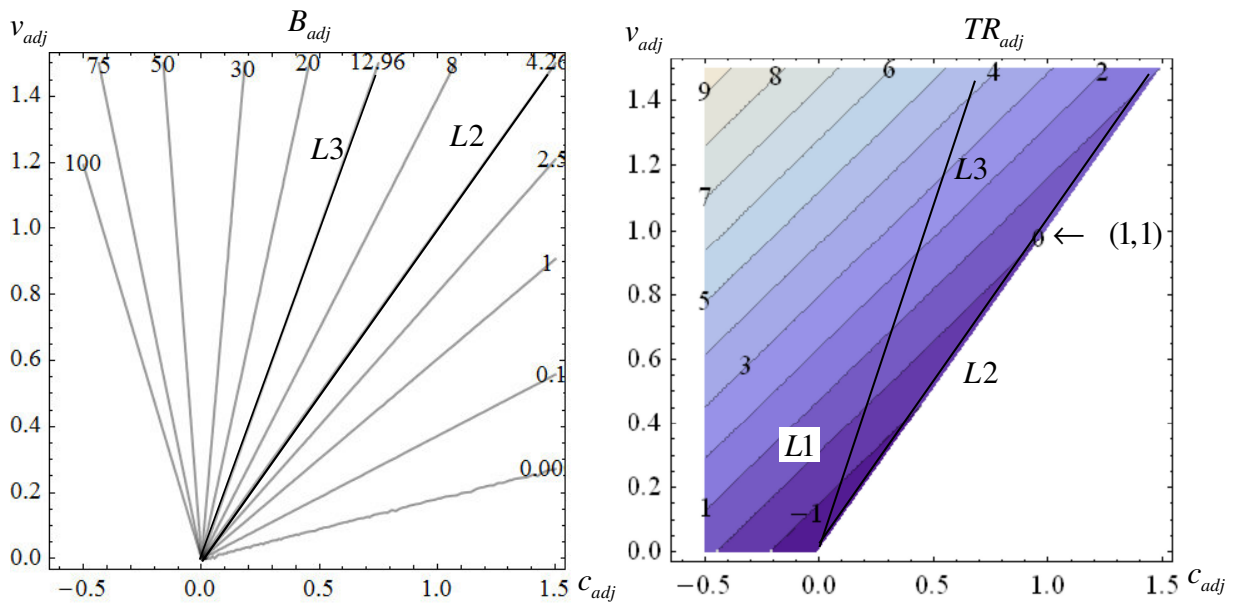


Abbildung 3. Mögliche Anpassungen (links) u. Transferkosten für $N = B_{mon} = 4.26$ (rechts)
 $(v=k=c=T=1, \varepsilon=2, a=100, \delta=0.1; c_{adj} \geq -v/\varepsilon=-0.5, B_{soc}=12.96)$

5 Modellierung von Lagerkosten und Restwerten

Ziel dieses Abschnitts ist es einen Ansatz vorzustellen, der es erlaubt auch Lagerkosten sowie Restwerte für unverkaufte Artikel zu berücksichtigen. Dabei nehmen wir an, dass die zum Zeitpunkt t noch nicht verkaufte Artikelmenge Lagerkosten mit der zeitabhängigen Rate $h(t)$ pro Mengen- und Zeiteinheit verursacht. Darüber hinaus sei im Endzeitpunkt T der Restwert unverkaufter Artikel gegeben durch den Wert S_E pro Einheit. Wir nehmen an, dass die Funktion $h(t)$ integrierbar und S_E nicht negativ ist.

Im Kontext der Problemformulierung bleibt die Dynamik, siehe Abschnitt 2 und Formel (2.1), unverändert. Die Gewinnfunktion des verallgemeinerten deterministischen Steuerungsproblems lautet, vgl. (2.2),

$$\int_0^{T \wedge \tau} \lambda(t, p_t, w_t) \cdot (v \cdot p_t - c(t)) - k(t) \cdot w_t - h(t) \cdot x(t) \, dt + 1_{\{\tau=T\}} \cdot S_E \cdot x(T).$$

Als Ansatz für die Wertefunktion V_L des erweiterten Modells mit Lagerkosten und Restwert, betrachten wir in Analogie zu (2.3) die assoziierte HJB-Gleichung, $0 \leq t < T$, $0 < x \leq N$,

$$\dot{V}_L(t, x) - h(t) \cdot x + \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \{ \lambda(t, p, w) \cdot (v \cdot p - c(t) - V'_L(t, x)) - k(t) \cdot w \} = 0 \quad (5.1)$$

mit den Randbedingungen $V_L(T, x) = S_E \cdot x$, $0 \leq x \leq N$, und $V_L(t, 0) = 0$, $0 \leq t \leq T$. Wir definieren die folgenden beiden Hilfsfunktionen: die Funktion L erfasst im Zeitraum von t bis T entstehende Lagerkosten, die Funktion S ist verbunden mit dem Restwert S_E . Für $0 \leq x \leq N$ und $0 \leq t \leq T$ sei

$$L(t, x) := x \cdot \int_t^T h(s) \, ds \quad \text{und} \quad S(t, x) := S_E \cdot x.$$

Unter Verwendung der in Abschnitt 2 für den Fall ohne Lagerkosten und Restwerte bestimmten Wertefunktion V machen wir den folgenden Ansatz für den Wertefunktionskandidaten V_L des erweiterten Problems, $0 \leq x \leq N$, $0 \leq t \leq T$,

$$V_L(t, x) := V(t, x) - L(t, x) + S(t, x). \quad (5.2)$$

Da die Hilfsfunktionen L und S stetig differenzierbar in t und x sind, erhalten wir aus (5.2) die partiellen Ableitungen

$$V'_L(t, x) = V'(t, x) - L'(t, x) + S'(t, x) \quad \text{und} \quad \dot{V}_L(t, x) := \dot{V}(t, x) - \dot{L}(t, x) + \dot{S}(t, x),$$

wobei $L'(t, x) = \int_t^T h(s) \, ds$, $S'(t, x) = S_E$, $\dot{L}(t, x) = -h(t) \cdot x$ und $\dot{S}(t, x) = 0$ ist. Mit der Transformation (5.2) ist die HJB-Gleichung (5.1) äquivalent zur partiellen Differentialgleichung, $0 \leq t < T$, $0 < x \leq N$,

$$-\dot{V}(t, x) + \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \{ \lambda(t, p, w) \cdot (v \cdot p - c(t) - V'(t, x) + L'(t, x) - S'(t, x)) - k(t) \cdot w \} = 0. \quad (5.3)$$

Da die Funktionen $L'(t, x)$ und $S'(t, x)$ in unserem Fall nicht vom Zustand x abhängen, entspricht Gleichung (5.3) der HJB-Gleichung des Basismodells aus Abschnitt 2 mit der Produktionskostenfunktion

$$\tilde{c}(t) := c(t) - \int_t^T h(s) \, ds + S_E \stackrel{c(t)=c, h(t)=h}{=} c - h \cdot (T - t) + S_E.$$

Wenden wir die Formeln aus Theorem 2.1 bzw. Theorem 3.1 für die Produktionskosten $\tilde{c}(t)$ anstelle von $c(t)$ an, so können wir mit Hilfe von V und der Transformation (5.2) eine in t und x stetig differenzierbare Funktion V_L berechnen, welche die HJB-Gleichung (5.1) samt zugehöriger Randbedingungen für V_L erfüllt. Aufgrund der Randbedingungen für V , vgl. (2.4), gilt nämlich

$$\begin{aligned} V_L(t, 0) &:= \underbrace{V(t, 0)}_{=0} - \underbrace{L(t, 0)}_{=0} + \underbrace{S(t, 0)}_{=0} = 0, & 0 \leq t \leq T \\ \text{und} \quad V_L(T, x) &:= \underbrace{V(T, x)}_{=0} - \underbrace{L(T, x)}_{=0} + \underbrace{S(T, x)}_{=0} = 0, & 0 \leq x \leq N. \end{aligned}$$

Natürlich ist die so konstruierte Lösung des erweiterten Modells nur dann zulässig, wenn S und L , bzw. S_E und $h(t)$ so gewählt sind, dass die durch die zu (5.1) gehörigen Optimalitätsbedingungen beschriebenen Kontrollen, vgl. (2.5),

$$p_L^*(t, x) := \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{v} \cdot V'_L(t, x) \quad \text{und} \quad w_L^*(t, x) := \left(\frac{a(t) \cdot v \cdot \delta}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot e^{-\varepsilon \cdot p_L^*(t, x)} \right)^{1/(1-\delta)} \quad (5.4)$$

zulässig, d.h. nichtnegativ sind. Ist dies der Fall, so sind die Kontrollen optimal, vgl. Bertsekas (2005), Proposition 3.2.1. Mit der in Abschnitt 2 hergeleiteten Lösung, siehe Theorem 2.1, erhalten wir konkret

$$V_L(t, x) := V(t, x) - x \cdot \int_t^T h(s) \, ds + x \cdot S_E \quad \text{mit} \quad V(t, x) = \begin{cases} \tilde{B}(t)/d & , x \geq \tilde{B}(t) \\ x/d \cdot \ln(e \cdot \tilde{B}(t)/x) & , \text{sonst} \end{cases},$$

$$\text{wobei} \quad \tilde{B}(t) := \int_t^T \tilde{\beta}(s) \, ds := \int_t^T e^{-d \cdot \tilde{c}(s)} \cdot \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{v \cdot \delta}{\varepsilon \cdot e} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{a(s)}{k(s)^\delta} \right)^{1/(1-\delta)} ds, \quad \tilde{c}(t) := c(t) - \int_t^T h(s) \, ds + S_E$$

und $d := \varepsilon / (v \cdot (1 - \delta))$ ist. Da die Opportunitätskosten (in open loop Form) durch

$$V'(t, x(t)) = \begin{cases} 0 & , N \geq \tilde{B}(0) \\ 1/d \cdot \ln(\tilde{B}(0)/N) & , \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{vgl. (2.10),} \quad \text{gegeben sind, folgt, dass die}$$

optimalen Preise, bestimmt durch $p_L^*(t, x(t)) := 1/\varepsilon + (\tilde{c}(t) + V'(t, x(t)))/v$, vgl. (5.4) in Verbindung mit (5.2), für alle Zeitpunkte nichtnegativ sind, wenn die Bedingungen

$$\tilde{c}(t) \geq -\frac{v}{\varepsilon}, \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T \text{ und } N \geq \tilde{B}(0) \quad (5.5)$$

$$\text{bzw.} \quad \tilde{c}(t) + 1/d \cdot \ln(\tilde{B}(0)/N) \geq -\frac{v}{\varepsilon} \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T \text{ und } N < \tilde{B}(0) \quad (5.6)$$

erfüllt sind. Beachte, dass die Bedingung (5.6) für den Unterbestandsfall im Vergleich zu Bedingung (5.5) für den Überbestandsfall, schwächer ist. Da $\tilde{c}(t)$ in h fällt und in S_E steigt bedeutet dies, dass für kleinere Anfangsbestände N höhere Lagerkosten und kleinere Restwerte betrachtet werden können. Der vorgestellte Transformationsansatz nutzt nicht die spezifische Struktur der Nachfrage aus und kann daher auch in allgemeineren, selbst stochastischen, Modellklassen angewandt werden kann.

Um das vorgestellte Resultat zu illustrieren betrachten wir zum Abschluss ein Beispiel. Für ein zeithomogenes Modell untersuchen wir Fälle mit und ohne Lagerkosten bzw. mit und ohne Restwert. Abb. 4a zeigt die optimalen Bestandsentwicklungen für vier verschiedene Kombinationen von h und S_E . Die beiden Szenarien mit Lagerkosten ($h=1$) sind gekennzeichnet durch konvexe Bestandstrajektorien; d.h. es ist optimal zu Beginn schneller zu verkaufen, um Lagerkosten zu reduzieren. Die zwei Szenarien ohne Lagerkosten ($h=0$) weisen einen gleichmäßigen Abverkauf aus. Bei gleichen Lagerkosten wirkt sich ein positiver Restwert ($S_E=1$) gegenüber dem Fall ohne Restwert ($S_E=0$) durch eine geringere Gesamtverkaufsmenge aus.

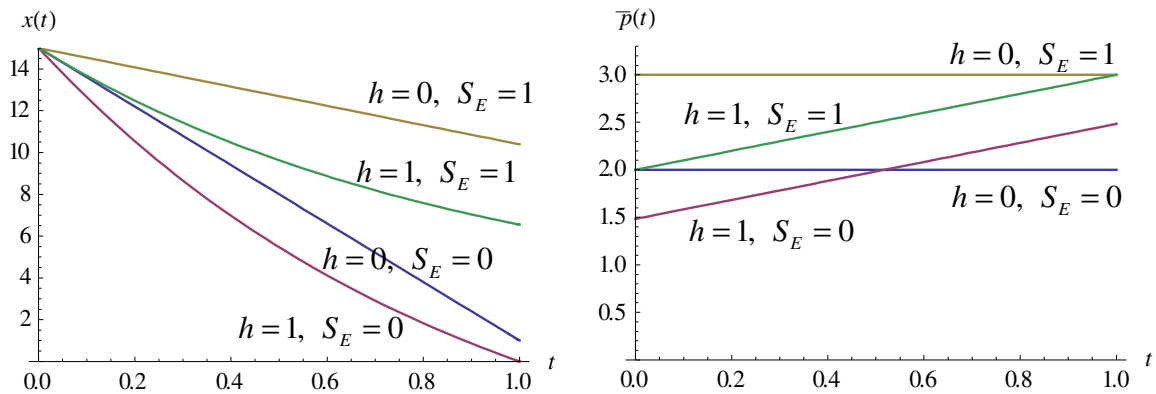


Abbildung 4. Optimale Bestandspfade (links) und optimale Preistrajektorien (rechts) für Lagerkostenraten $h(t) = h = 0$ bzw. $h(t) = h = 1$ u. Restwerte $S_E \in \{0, 1\}$ ($N=15, T=1, a(t)=100, c(t)=1, \varepsilon=k=v=1, \delta=0.1$)

Die rechte Abb. 4b stellt die verschiedenen optimalen Preispfade dar. Während in den Szenarien ohne Lagerkosten Fixpreispolitiken optimal sind, führen Lagerkosten zu monoton steigenden Preisverläufen. Dieser Umstand erklärt die abklingende Abverkaufsgeschwindigkeit. Bei gleichen Lagerkosten führt der positive Restwert zu einem festen Preisaufschlag. Das Szenario mit Restwert und ohne Lagerkosten liefert erwartungsgemäß den höchsten Gewinn $V_{h=0, S_E=1}(0, N) = 19.15$. Der niedrigste Gewinn $V_{h=1, S_E=0}(0, N) = 5.75$ entsteht im Fall mit Lagerkosten und ohne Restwert. Die Gewinne der übrigen zwei Szenarien belaufen sich auf $V_{h=0, S_E=0}(0, N) = 12.60$ und $V_{h=1, S_E=1}(0, N) = 7.60$. Die Zahlen zeigen, dass die Gewinnunterschiede beträchtlich sein können.

6 Fazit

Wir fassen die vorgestellten Ergebnisse zusammen. Als eine Erweiterung der reinen Preismodelle von Gallego, van Ryzin (1994) bzw. Berman, Hu, Pang (2013) betrachten wir in Anlehnung an das verwandte stochastische Modell von MacDonald, Rasmussen (2009) eine

zusätzliche dynamische Werbekomponente. Neben einer inhomogenen Ankunftsintensität und zusätzlichen Umsatzparametern stellt die Internalisierung von zeitabhängigen Produktionskosten eine wichtige Erweiterung dar.

Die Lösung des zeitstetigen Preis-Werbemodells mit kontinuierlichem Zustandsraum basiert auf der Konstruktion der Lösung der partiellen Differential (HJB) Gleichung, welche durch eine zweiteilige Funktion charakterisiert ist. In diesem Zusammenhang ist zwischen sogenannten Überbestands- und Unterbestandssituationen zu unterscheiden, wobei letztere durch einen vollständigen Abverkauf am Ende des Planungshorizontes gekennzeichnet sind. Wir leiten explizite Formeln für die optimalen Gewinne, Umsätze, Werbeausgaben sowie die optimalen Preis-Werbekontrollen in feedback und open loop Form her.

Des Weiteren wird die parameterabhängige Darstellung der Lösung neben Sensitivitätsaussagen auch für die Analyse der sozialen Effizienz der optimalen Politiken genutzt. Wir zeigen, dass Klassen von teilweise selbstfinanzierenden Subventions- und Besteuerungsmechanismen existieren, um Effizienz herzustellen.

In Abschnitt 5 verallgemeinern wir das Modell um die Einbeziehung von Lagerkosten sowie die Möglichkeit unverkauften Artikeln einen Restwert zuzuordnen. Die vorgestellte Transformation erlaubt es die Lösung des erweiterten Modells auf die des Basismodells mit spezifischen Produktionskosten zurückzuführen.

Literatur

- Bagwell, K. (2007). *The Economic Analysis of Advertising*. Handbook of Industrial Organization, Elsevier.
- Berman, O., M. Hu, Z. Pang (2013). *Up then Down: The Bid-Price Trends in Revenue Management*. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2232171>.
- Bertsekas, D. P. (2005). *Dynamic Programming and Optimal Control Vol. I*. Athena Scientific.
- Bitran, G., R. Caldentey (2003). *An Overview of Pricing Models for Revenue Management*. M&SOM 5, 1-17.
- Feichtinger, G., R. F. Hartl, S. P. Sethi (1994). *Dynamic Optimal Control Models in Advertising: Recent Developments*. Management Science 40 (2), 195-226.
- Gallego, G., G. van Ryzin (1994). *Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons*. Management Science 40, 999-1020.
- Gallego, G., G. van Ryzin (1997). *A Multi-Product Dynamic Pricing Problem and its Application to Network Yield Management*. Operations Research 45, 24-41.
- Gönsch, J., R. Klein, C. Steinhardt (2009). *Dynamic Pricing – State-of-the-Art*. Zeitschrift für Betriebswirtschaft 79, special issue 3, 1-40.
- Helmes, K., R. Schlosser (2013). *Dynamic Advertising and Pricing with Constant Demand Elasticities*. Journal of Economic Dynamics and Control 37, 2814-2832.

- Helmes, K., R. Schlosser, M. Weber (2013). *Dynamic Advertising and Pricing in a Class of General New-Product Adoption Models*. European Journal of Operational Research 229, 433-443.
- Huang, J., M. Leng, L. Liang (2012). *Recent Developments in Dynamic Advertising Research*. European Journal of Operations Research 220 (3), 591-609.
- Lee, E. B., L. Markus (1967). *Foundations of Optimal Control Theory*. Wiley.
- MacDonald, L., H. Rasmussen (2009). *Revenue Management with Dynamic Pricing and Advertising*. Production Journal of Revenue and Pricing Management 9, 126-136.
- Mahajan, V., E. Muller, F. M. Bass (1990). *New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Direction of Research*. Journal of Marketing 54, 1-26.
- McAfee, R. P., V. te Velde (2006). *Dynamic Pricing in the Airline Industry*. Handbook on Economics and Information Systems. Elsevier, Amsterdam, 527-570.
- McAfee, R. P., V. te Velde (2008). *Dynamic Pricing with Constant Demand Elasticity*. Production and Operations Management 17 (4), 432-438.
- McGill, J. I., G. van Ryzin (1999). *Revenue Management: Research Overview and Prospects*. Transportation Science 33, 233-256.
- Phillips, R. L. (2005). *Pricing and Revenue Optimization*. Stanford University Press, Stanford.
- Sethi, S. P., G. L. Thompson (2000). *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics*. Second Edition, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Sethi, S. P., A. Prasad, X. He. (2008). *Optimal Advertising and Pricing in a New-Product Adoption Model*. Journal of Optimization Theory and Applications 139 (2), 351-360.
- Shen, Z. M., X. Su (2007). *Customer Behavior Modeling in Revenue Management and Auctions: A Review and New Research Opportunities*. Production Operations Management 16 (6), 713-728.
- Steffenhagen, H. (2006). *Analytische Planung Effektiver und Effizienter Werbemixes*. Zeitschrift für Betriebswirtschaft 76, Heft 5, 499-524.
- Talluri, K. T., G. van Ryzin (2004). *The Theory and Practice of Revenue Management*. Kluwer Academic Publishers.

Anhang

Abschnitt 2

Herleitung des optimalen Nettopreises im Überbestandsfall

Für konstante Nettopreise \tilde{p} beschreiben wir den zugehörigen Bruttopreis $p(s; t, x) = (\tilde{p}(t, x) + c(s)) / v$ durch die Transformation $p_s(\tilde{p}) := (\tilde{p} + c(s)) / v$. Im Überbestand ergibt sich der optimale konstante Nettopreis wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}^{OC} &:= \arg \max_{\tilde{p} \geq 0} \int_t^T \tilde{p} \cdot \lambda(s, p_s(\tilde{p}), w_s(p_s(\tilde{p})) - k(s) \cdot w_s(p_s(\tilde{p}))) ds \\
 &= \arg \max_{\tilde{p} \geq 0} \int_t^T \tilde{p} \cdot a(s) \cdot \left(\frac{a(s) \cdot v \cdot \delta}{k(s) \cdot \varepsilon} \cdot e^{-\varepsilon \cdot (\tilde{p} + c(s)) / v} \right)^{\delta / (1 - \delta)} \cdot e^{-\varepsilon \cdot (\tilde{p} + c(s)) / v} - k(s) \cdot \left(\frac{a(s) \cdot v \cdot \delta}{k(s) \cdot \varepsilon} \cdot e^{-\varepsilon \cdot (\tilde{p} + c(s)) / v} \right)^{1 / (1 - \delta)} ds \\
 &= \underbrace{\int_t^T \left(\frac{a(s) \cdot v \cdot \delta}{k(s) \cdot \varepsilon} e^{-\varepsilon \cdot c(s) / v} \right)^{1 / (1 - \delta)} k(s) ds}_{>0} \cdot \arg \max_{\tilde{p} \geq 0} \left(\tilde{p} \cdot \left(e^{-\varepsilon \cdot \tilde{p} / v} \right)^{1 / (1 - \delta)} \frac{\varepsilon}{v \cdot \delta} - \left(e^{-\varepsilon \cdot \tilde{p} / v} \right)^{1 / (1 - \delta)} \right) \\
 &= \arg \max_{\tilde{p} \geq 0} \left(\tilde{p} \cdot e^{-d \cdot \tilde{p}} \cdot \frac{\varepsilon}{v \cdot \delta} - e^{-d \cdot \tilde{p}} \right), \text{ wobei } d := \frac{\varepsilon}{v \cdot (1 - \delta)} \\
 &= \arg \max_{\tilde{p} \geq 0} \left(\tilde{p} \cdot \frac{\varepsilon}{v \cdot \delta} - 1 \right) \cdot e^{\frac{-\varepsilon}{v \cdot (1 - \delta)} \cdot \tilde{p}}.
 \end{aligned}$$

Mit der Bedingung erster Ordnung $\frac{\varepsilon}{v \cdot \delta} \cdot e^{-d \cdot \tilde{p}} - \frac{\varepsilon}{v \cdot (1 - \delta)} \cdot \left(\tilde{p} \cdot \frac{\varepsilon}{v \cdot \delta} - 1 \right) \cdot e^{-d \cdot \tilde{p}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} - \tilde{p} \cdot \frac{\varepsilon}{v \cdot \delta} = 0$, erhalten wir schließlich $\tilde{p} = v / \varepsilon$. Die hinreichende Bedingung für ein Maximum ist erfüllt.

Abschnitt 4

Beweis von Proposition 4.2 (selbstfinanzierende Anpassungen)

(i) Unterbestand, allgemeine Anpassungen

Die Balance-Gleichung für Transferkosten (4.7) liefert

$$TCS_{soc} + TPS_{adj} - \underbrace{(UTR_{adj} + WTR_{adj})}_{=0} = V_{soc} \Leftrightarrow \varepsilon^{-1} \cdot (B_{soc}(0) \wedge N) + V_{adj}(0, N) = V_{soc}(0, N). \quad (A1)$$

Im Unterbestand, d.h. wenn $N < B_{soc}(0)$, gilt für effiziente Anpassungen $N < B_{adj}^{(0)}(0)$. Mit der Lösungsformel $\tilde{V}^{UC}(0, N) = N \cdot \tilde{v} \cdot (1 - \delta) / \varepsilon \cdot \ln(e \cdot \tilde{B}(0) / N)$ für beliebige $(\tilde{v}, \tilde{k}, \tilde{c})$ folgt aus (A1):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} \cdot N + \frac{v_{adj}^{(0)} \cdot (1-\delta)}{\varepsilon} \cdot N \cdot \ln \left(\frac{e \cdot B_{adj}^{(0)}(0)}{N} \right) &= \frac{v \cdot (1-\delta)}{\varepsilon} \cdot N \cdot \ln \left(\frac{e \cdot B_{soc}(0)}{N} \right) \quad \left| \cdot \frac{\varepsilon}{(1-\delta) \cdot N} \right| - \frac{1}{1-\delta} \\
\Leftrightarrow \quad v_{adj}^{(0)} \cdot \ln \left(\frac{e \cdot B_{adj}^{(0)}(0)}{N} \right) &= v \cdot \ln \left(\frac{e \cdot B_{soc}(0)}{N} \right) - \frac{1}{1-\delta} \quad |e^{\wedge} \\
\Leftrightarrow \quad \left(\frac{e \cdot B_{adj}^{(0)}}{N} \right)^{v_{adj}^{(0)}} &= \left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N} \right)^v \cdot e^{\frac{-1}{1-\delta}} \quad \text{für alle } N < B_{soc}(0). \quad (A2)
\end{aligned}$$

(ii) Unterbestand, allgemeine Anpassungen mit konstanten Stückkosten

Für Parametrisierungen $(\tilde{v}, \tilde{k}, \tilde{c})$ mit $\tilde{c}(t) \equiv \tilde{c}$ konstant gilt

$$\tilde{B}(t) \stackrel{\tilde{c} \text{ hom}}{=} e^{\frac{-\varepsilon \cdot \tilde{c}}{1-\delta} \cdot \tilde{v}} \cdot \int_t^T \frac{\tilde{k}(s)}{\tilde{v}} \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{k}(s)} \cdot \frac{\delta \cdot a(s)}{\varepsilon \cdot e} \right)^{1/(1-\delta)} ds.$$

Da $c_{soc}(t) \equiv c - 1/\varepsilon$ ist und (4.3) die Beziehungen $c_{adj}^{(0)}(t) \equiv c - q$ sowie $v_{adj}^{(0)}/k_{adj}^{(0)}(t) = v/k(t)$ garantiert, kann die maximale Verkaufsmenge $B_{adj}^{(0)}(0) > N$ geschrieben werden als

$$B_{adj}^{(0)} = e^{\frac{-\varepsilon \cdot c_{adj}^{(0)}}{1-\delta} \cdot v_{adj}^{(0)}} \cdot e^{\frac{\varepsilon \cdot c - 1/\varepsilon}{1-\delta} \cdot v} \cdot B_{soc}.$$

Damit vereinfacht sich Gleichung (A2) im Falle selbstfinanzierender (4.3)-Anpassungen, $N < B_{soc}(0)$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e}{N} \cdot B_{soc} \right)^{v_{adj}^{(0)}} e^{\frac{-\varepsilon \cdot c_{adj}^{(0)}}{1-\delta} \cdot v_{adj}^{(0)}} \cdot e^{\frac{\varepsilon c - 1}{(1-\delta) \cdot v} \cdot v_{adj}^{(0)}} &= \left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N} \right)^v \cdot e^{\frac{-1}{1-\delta}} \quad \left| \cdot \left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N} \right)^{-v_{adj}^{(0)}} \right. \\
\Leftrightarrow \quad e^{\frac{1-\varepsilon \cdot c_{adj}^{(0)}}{1-\delta}} \cdot e^{\frac{\varepsilon c - 1}{(1-\delta) \cdot v} \cdot v_{adj}^{(0)}} &= \left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N} \right)^{v-v_{adj}^{(0)}} \quad \left| \ln \right| \cdot \frac{1-\delta}{\varepsilon} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1-\varepsilon \cdot c_{adj}^{(0)}}{1-\delta} + \frac{\varepsilon c - 1}{(1-\delta) \cdot v} \cdot v_{adj}^{(0)} &= (v - v_{adj}^{(0)}) \cdot \ln \left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N} \right) \quad (\text{Auflösen nach } v_{adj}^{(0)}) \\
\Leftrightarrow \quad v_{adj}^{(0)} \cdot \left(\frac{\varepsilon c - 1}{(1-\delta) \cdot v} + \ln \left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N} \right) \right) &= \frac{\varepsilon \cdot c_{adj}^{(0)} - 1}{1-\delta} + v \cdot \ln \left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N} \right) \\
\Leftrightarrow \quad v_{adj}^{(0)} &= v \cdot \frac{\varepsilon \cdot c_{adj}^{(0)} - 1 + (1-\delta) \cdot v \cdot \ln(e \cdot B_{soc} / N)}{\varepsilon \cdot c - 1 + (1-\delta) \cdot v \cdot \ln(e \cdot B_{soc} / N)} \\
\Leftrightarrow \quad v_{adj}^{(0)} &= v + \frac{v \cdot \varepsilon \cdot (c_{adj}^{(0)} - c)}{\varepsilon \cdot c - 1 + (1-\delta) \cdot v \cdot \ln(e \cdot B_{soc} / N)}.
\end{aligned}$$

Damit ist $v_{adj}^{(0)}$ positiv gdw. $c_{adj}^{(0)} > -1/\varepsilon + (1-\delta)/\varepsilon \cdot v \cdot \ln(e \cdot B_{soc}/N)$. Diese untere Schranke für $c_{adj}^{(0)}$ steigt in N . Für $N = B_{soc}(0)$ ergibt sich der Schrankenwert $\varepsilon^{-1} \cdot (1-v \cdot (1-\delta))$, welcher negativ ist, wenn $v \cdot (1-\delta) > 1$ gilt. Ist $v \cdot (1-\delta) < 1$, dann ist $c_{adj}^{(0)}$ positiv.

(iii) Proportionale Anpassungen (Unterbestand)

Im Unterbestandsfall, d.h. wenn $N < B_{soc}(0)$, implizieren sämtliche proportionale (4.2)-Anpassungen die Beziehung $N < B_{adj}^{(0)}(0) = B_{soc}(0)$, und (A2) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N} \right)^{v_{adj}^{(0)}} &= \left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N} \right)^v \cdot e^{\frac{-1}{1-\delta}} \\ \Leftrightarrow (v_{adj}^{(0)} - v) \cdot \ln \left(\frac{e \cdot B_{soc}}{N} \right) &= -\frac{1}{1-\delta} \\ \Leftrightarrow v_{adj}^{(0)} &= v - \frac{1}{(1-\delta) \cdot \ln(e \cdot B_{soc}/N)}. \end{aligned}$$

Damit ist $v_{adj}^{(0)}$ positiv genau dann, wenn

$$(1-\delta) \cdot v > \frac{1}{\ln(e \cdot B_{soc}/N)} \Leftrightarrow N < B_{soc} \cdot e^{\frac{1}{(1-\delta) \cdot v}}. \quad (A3)$$

Nehmen wir $N < B_{soc}(0)$ an, so ist die letzte Ungleichung immer erfüllt, wenn

$$1 - \frac{1}{(1-\delta) \cdot v} > 1 \Leftrightarrow (1-\delta) \cdot v > 1.$$

(iv) Proportionale Anpassungen (Überbestand)

Im Überbestandsfall, d.h. wenn $N \geq B_{adj}^{(0)}(0) = B_{soc}(0)$ ist, folgt mit der Lösungsformel $V_{soc}^{OC}(0, N) = B_{soc}(0) \cdot v \cdot (1-\delta)/\varepsilon$ bzw. $V_{adj}^{OC}(0, N) = B_{adj}^{(0)}(0) \cdot v_{adj}^{(0)} \cdot (1-\delta)/\varepsilon$ aus (A1), siehe (i),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \cdot B_{soc}(0) + \frac{v_{adj}^{(0)} \cdot (1-\delta)}{\varepsilon} \cdot B_{soc}(0) &= \frac{v \cdot (1-\delta)}{\varepsilon} \cdot B_{soc}(0) \quad \left| \cdot \frac{\varepsilon}{B_{soc}(0)} \right. \\ \Leftrightarrow 1 + v_{adj}^{(0)} \cdot (1-\delta) &= v \cdot (1-\delta) \quad \Leftrightarrow v_{adj}^{(0)} = v - 1/(1-\delta). \end{aligned}$$

Dabei ist $v_{adj}^{(0)}$ positiv genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(1-\delta) \cdot v > 1. \quad (A4)$$

(v) Existenz selbstfinanzierender Anpassungen

Proportionale selbstfinanzierende Anpassungen sind in folgenden Fällen möglich:

im Unterbestand gdw. $N < B_{soc} \cdot e^{\frac{1}{(1-\delta)v}}$, vgl. (iii), (A3);

im Überbestand gdw. $B_{soc} < B_{soc} \cdot e^{1-1/v(1-\delta)}$, d.h. gdw. $(1-\delta) \cdot v > 1$, vgl. (iv), (A4).

Die Bedingung $N \wedge B_{soc} < B_{soc} \cdot e^{1-1/(v(1-\delta))} = e \cdot B$ liefert somit eine zusammenfassende Bedingung.

VI Ein Stochastisches Dynamisches Preis-Werbemodell unter Risikoaversion

Abstract

Wir analysieren ein stochastisches dynamisches Preis-Werbemodell unter Einbeziehung konstanter absoluter Risikoaversion. Wir betrachten eine zeitinhomogene Version des exponentiellen Gallego, van Ryzin Modells mit zusätzlichen Werbeeffekten und zeitabhängigen Produktionskosten. Wir leiten explizite Lösungsformeln für die optimale Preis- und Werbepolitik sowie dem Sicherheitsäquivalent her. Darüber hinaus geben wir Formeln für die Zustandswahrscheinlichkeiten des optimal gesteuerten Bestandsprozesses an und stellen effiziente Simulationstechniken vor. Die Ergebnisse werden genutzt, um zu quantifizieren wie sich verschiedene Risikoaversionsgrade auf die Gewinnverteilung auswirken. Eine Analyse der erwarteten Preisentwicklung zeigt außerdem, dass es sich für einzelne Kunden kurzfristig nicht lohnt auf fallende Preise zu spekulieren, solange die Produktionskosten nicht mit der Zeit steigen. Des Weiteren zeigen wir, dass die Lösung des stochastischen Modells für den Verkauf kleiner Verkaufseinheiten gegen die Lösung des korrespondierenden deterministischen Modells mit kontinuierlichem Zustandsraum konvergiert.

1 Einleitung

Zur Theorie des Revenue Managements und der dynamischen Preissetzung gibt es eine umfangreiche Literatur, welche z.B. im Buch von Talluri, van Ryzin (2004) oder den aktuellen Übersichtsartikeln von Bitran, Caldentey (2003), Elmaghraby, Keskinocak (2003) sowie Chiang, Chen, Xu (2007) zusammengefasst ist. Eine aktuelle Übersicht zu dynamischen Preissetzungsmodellen liefert der deutschsprachige Artikel Gönsch, Klein, Steinhardt (2009). Ähnlich umfangreich ist die Marketing-Literatur zu Werbemodellen, z.B. Nerlove, Arrow (1962), Bass (1969), Feichtinger, Hartl, Sethi (1994), Steffenhagen (2006), Bagwell (2007), und Huang, Leng, Liang (2012), um nur einige zu nennen.

Der simultane dynamische Einsatz von Preissteuerung und Werbeausgaben ist bisher weniger intensiv erforscht worden. Während die Mehrzahl der im Marketing verwendeten Modelle deterministisch sind und zumeist den Einfluss von Marketing-Instrumenten auf den Verkauf langlebiger Güter untersuchen, sind dynamische Preissetzungs- und Lagerhaltungsmodelle typischer Weise stochastisch und durch einen endlichen Verkaufshorizont charakterisiert.

Im Folgenden wollen wir uns beim Literaturüberblick, passend zu unserem Modell, auf spezielle *stochastische* Verkaufsprobleme konzentrieren. Dabei wird von einem Monopolisten ausgegangen, der eine endliche Anzahl verderblicher Güter über einen gegebenen Zeithorizont hinweg gewinnoptimal zu verkaufen sucht. In der Literatur wird im Allgemeinen von einer bestimmten Sprungintensität interessierter Kunden ausgegangen, welche in Abhängigkeit der Relation ihres Reservationspreises und dem Angebotspreis eine Kaufentscheidung fällen. Während im reinen Preismodell die Ankunftsrate fixiert ist, kann in Modellen mit endogenisierter dynamischer Werbung die Ankunftsintensität potentieller Kunden gesteuert werden. Innerhalb des Revenue Managements entspricht diese Problemstellung z.B. dem Ticketverkauf spezieller Konzert- oder Sport Events sowie dem Fisch- oder Obstmarkt. Im Falle exogener Werbung sind insbesondere das Airline Management, der Gebrauchtwagenmarkt und die Hotel Branche zu nennen.

In modernen Anwendungen spielt *Risikoaversion* eine zunehmend bedeutende Rolle. In der aktuellen Forschung gibt es in diesem Zusammenhang vermehrt Ansätze Risikoaversion in Form von Wahrscheinlichkeitsrestriktionen, z.B. Levin, McGill und Nediak (2008), Koenig, Meissner (2009) oder verschiedenen Nutzenfunktionen, siehe Chen, Sim, Simchi-Levi, Sun (2007) und Bäuerle, Rieder (2013) mit in die Optimierung einzubeziehen. Dabei ist insbesondere die exponentielle Nutzenfunktion, welche konstante absolute Risikoaversion widerspiegelt, verbreitet, vgl. Barz, Waldmann (2007), Feng, Xiao (2008), Lim, Shanthikumar (2007) und Li, Zhuang (2009).

Mit der Einbeziehung von Risikoaversion werden stochastische Modelle sehr komplex, und explizite Lösungen existieren i.A. nicht mehr. Allen uns bekannten explizit lösbaren stochastischen Verkaufsmodellen liegt lediglich ein risikoneutrales Zielkriterium zugrunde, d.h. der Entscheider maximiert den erwarteten Verkaufsgewinn. Die mit unserem Modell verwandten Verkaufsmodelle lassen sich dabei im Wesentlichen in zwei Familien unterteilen. Während die eine Klasse von Modellen durch eine Nachfragestruktur mit konstanter Preis- bzw. Werbeelastizität gekennzeichnet ist, wird in der zweiten Klasse davon ausgegangen, dass die Reservationspreise interessierter Kunden exponentialverteilt sind.

Für den Fall isoelastischer Nachfrage lösen McAfee, te Velde (2008) das stochastische Modell mit endlichem Horizont und zeitabhängigen Ankunftsrate. Die Lösung des Modells basiert auf der Separation von Zustands- und Zeitabhängigkeit. Die Auswertung des Modells beinhaltet die Approximation von Zustandswahrscheinlichkeiten sowie die Betrachtung von sozialer Effizienz. Helmes, Schlosser (2013), Kapitel 1, erweitern das reine Preismodell von McAfee, te Velde (2008) um isoelastische Werbung sowie zeitabhängige Diskontierung und geben explizite Lösungsformeln an. Neben der erwarteten Preisentwicklung werden auch die soziale Effizienz optimaler Strategien untersucht und Möglichkeiten der Regulierung angegeben.

Unser Modell gehört zur Klasse mit *exponentieller* Nachfrage. Gallego, van Ryzin (1994) untersuchen neben deterministischen Modellen mit allgemeiner Reservationspreisverteilung insbesondere auch den stochastischen Fall mit exponentieller Nachfrage. Im zeithomogenen Fall ohne Produktionskosten geben sie eine explizite Lösung an.

McAfee, te Velde (2006) analysieren das letztere zeithomogene Modell mit konstanten Produktionskosten und bestimmen Formeln für die Zustandswahrscheinlichkeiten des optimal gesteuerten Bestandsprozesses. Berman, Hu, Pang (2013) untersuchen erwartete Preistrends in reinen Preismodellen für allgemeinere Ankunfts-Punktprozesse unter Verwendung von Martingalbetrachtungen. Für das oben genannte exponentielle Preismodell mit zeitabhängiger Ankunftsrate geben sie im stochastischen und deterministischen Fall Lösungsformeln an. Produktionskosten werden nicht berücksichtigt.

Trotz der Fülle an Literatur zur dynamischen Preissetzung und dynamischen Marketing Modellen gibt es überraschend wenige Arbeiten, die den simultanen Einsatz der Steuerungsgrößen Preis und Werbung untersuchen. Für die Klasse der isoelastischen Nachfrage liefern die Arbeiten von Sethi et al. (2008) und Krishnamoorthy et al. (2010) einen wichtigen Beitrag. Beide Arbeiten betrachten deterministische Preis-Werbemodelle mit unendlichem Horizont. Verallgemeinerungen der Ergebnisse finden sich in den ebenfalls deterministischen Modellen von Helmes, Schlosser, Weber (2013) und Kapitel 3.

Neben den genannten Arbeiten ist für uns das folgende stochastische Preis-Werbemodell von zentraler Bedeutung. MacDonald, Rasmussen (2009) analysieren als Erweiterung des reinen

Preissetzungsmodells von Gallego, van Ryzin (1994) den zusätzlichen Einfluss von Werbung. Die Verkaufsrate ist hierbei eine zeithomogene Funktion des Preises und der Werberate in Form einer exponentiellen Reservationspreisverteilung sowie einer konkav steigenden Potenzfunktion des Werbeeinflusses. Für den Fall ohne Stückkosten leiten MacDonald, Rasmussen explizite Lösungsformeln für die optimale Preis-Werbepolitik sowie die Wertefunktion her. Darüber hinaus geben sie für eine deterministische Modellversion optimale Festpreis-Festwerbepolitiken an und berechnen zum Vergleich numerisch optimale Festpolitiken für den stochastischen Fall.

In diesem Kapitel behandeln wir das obige stochastische dynamische Preis-Werbemodell mit endlichem Zeithorizont unter zusätzlicher Berücksichtigung konstanter absoluter Risikoaversion. Im Fall exponentiell verteilter Reservationspreise und isoelastischen Werbeeinflüssen betrachten wir zeitabhängige Ankunftsintensitäten und zeitabhängige Produktionskosten. Vor diesem Hintergrund lassen wir uns von den folgenden Fragestellungen leiten:

- Wie lautet die optimale risikoaverse Preis-Werbepolitik?
- Welche Verkaufsergebnisse sind mit optimalen Strategien zu erwarten?
- Wie wirkt sich der Grad der Risikoaversion auf die Verteilung der Gewinne aus?
- Lohnt es sich aus Kundensicht auf fallende Preise zu warten?
- In welchem Zusammenhang stehen deterministisches und stochastisches Modell?

Das Kapitel ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt 2 beschreiben wir das stochastische Steuerungsproblem unter Einbeziehung von Risikoaversion. In Abschnitt 3 leiten wir die explizite Lösung des stochastischen Preis-Werbemodells her, welche auf der Lösung der Bellman-Gleichung, d.h. einer Differenzen-Differentialgleichung basiert. Darüber hinaus bestimmen wir Sensitivitätseigenschaften der optimalen risikoaversen feedback Kontrollen sowie des assoziierten Erwartungsnutzens bzw. des Sicherheitsäquivalents.

In Abschnitt 4 werten wir die Modelllösung aus. Wir leiten auf Basis der bedingten Verteilung der Verkaufszeitpunkte ein rekursives Verfahren zur Bestimmung der Zustandswahrscheinlichkeiten her und zeigen wie sich Realisierungen optimal gesteuerter Verkaufstrajektorien effizient in stetiger Zeit simulieren lassen. Des Weiteren verifizieren wir, dass die Konzentration der Gewinnverteilung mit höherem Risikoaversionsgrad zunimmt und die Gewinnerwartung abnimmt. In Abschnitt 5 untersuchen wir die kurz- und langfristige erwartete Entwicklung der Angebotspreise. Wir nutzen die Ergebnisse, um die Frage zu beantworten, unter welchen Bedingungen es sich für Kunden lohnt auf fallende Preise zu spekulieren.

In Abschnitt 6 betrachten wir eine verallgemeinerte Version des risikoneutralen Modells, wobei der Anfangsbestand in beliebig kleinen Einheiten der Größe h verkauft werden kann. Wir leiten explizite Formeln für die Zustandswahrscheinlichkeiten des optimal gesteuerten Bestandsprozesses sowie für das erwartete Verkaufsende her. Darüber hinaus weisen wir nach, dass die Wertefunktion für verschwindende h gegen die Lösung des verwandten deterministischen Modells konvergiert, vgl. Kapitel 5. In Abschnitt 7 fassen wir unsere Ergebnisse abschließend zusammen. Da die Beweise fast aller Resultate recht technisch sind, werden sie in einem Anhang zusammengefasst.

2 Modellbeschreibung

Wir erweitern das zeithomogene Preis-Werbemodell von Rasmussen, MacDonald (2009) um zeitinhomogene Nachfrage und Produktionskosten. Darüber hinaus lösen wir das stochastische Steuerungsproblem unter konstanter absoluter Risikoaversion.

Wir betrachten die Situation in der ein risikoaverser Monopolist N Artikel eines verderblichen Produkts bestmöglich über einen endlichen Planungshorizont der Länge T verkaufen möchte. Beim Verkauf eines Produktes im Zeitpunkt t fallen Produktionskosten in Höhe von $c(t)$ an, $0 \leq t \leq T$. Bei einem positiven Besteuerungsparameter v bleibt dem Monopolisten beim Verkauf zum Preis p ein Umsatz von $v \cdot p - c(t)$. Eine Diskontierung wird nicht betrachtet. Wir unterstellen myopische Kunden, welche nicht strategisch agieren: Ankommende interessierte Kunden entscheiden und „vergessen“. Preisvergleiche/-antizipationen oder gezieltes Wiederkehren werden im Modell nicht berücksichtigt.

Die Dynamik des Verkaufsprozesses ist durch die zu steuernde Verkaufs- bzw. Sprungintensität λ , $0 \leq t \leq T$, $p \geq 0$, $w \geq 0$,

$$\lambda(t, p, w) := a(t) \cdot w^\delta \cdot e^{-\varepsilon \cdot p}, \quad (2.1)$$

gegeben. In jedem Zeitpunkt t ist eine Preisentscheidung p zu treffen und die Höhe der Werberate w festzulegen. Wir gehen dabei von einer allgemeinen zeitabhängigen positiven Kundenankunftsintensität $a(t)$ aus. Der Monopolist kann einen Werbekanal einsetzen und die Werberaten dynamisch festlegen. Die multiplikative Wirkung der Werbung sei konkav steigend und beschrieben durch w^δ , $0 \leq \delta < 1$, wobei die Werbeelastizität $|-w / \lambda \cdot (\partial \lambda / \partial w)| \equiv \delta$ konstant ist. Die Kosten der Werbung werden mit $k(t) \cdot w$ angesetzt, wobei $k(t)$ eine gegebene nichtnegative Parameterfunktion ist. Die Funktionen c , u und k seien zudem stetig in t . Wir nehmen des Weiteren an, dass die Verteilungsfunktion F der Reservationspreise interessierter Kunden zeitunabhängig und von exponentiellem Typ ist, d.h. $F(p) := 1 - e^{-\varepsilon \cdot p}$, $p \geq 0$, $\varepsilon > 0$. Die Preiselastizität der Nachfrage $|-p / \lambda \cdot (\partial \lambda / \partial p)|$ ist somit $\varepsilon \cdot p$.

Zufällige Restbestände und kumulierte Gewinne zum Zeitpunkt t werden mit X_t und R_t bezeichnet, $0 \leq t \leq T$. Für kleine Zeitintervalle h und auf $[t, t+h]$ konstanten Werten p und w sind die Übergangswahrscheinlichkeiten für den Bestandsprozess $(X_t)_t$ vom Zeitpunkt t nach $t+h$, d.h. $X_t \rightarrow X_{t+h}$, approximativ beschrieben durch, $0 \leq i, j \leq N$,

$$P[X_{t+h} = j | X_t = i] \approx \begin{cases} \int_t^{t+h} \lambda(s, p, w) & , j = i - 1 \geq 0 \\ 1 - \int_t^{t+h} \lambda(s, p, w) & , j = i > 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (2.2)$$

Für die exakte Beschreibung der Dynamik der Prozesse $(X_t)_t$ und $(R_t)_t$ siehe Anhang, S. 181. Das (vorzeitige) Verkaufsende τ ist erreicht, wenn alle N Produkte verkauft wurden oder der Horizont T erreicht ist, d.h. $\tau := \min_{0 \leq t \leq T} \{t : X_t = 0\} \wedge T$; für alle $t \geq \tau$ setzen wir $\lambda(t, \cdot, \cdot) := 0$. Die Entwicklung des Gewinnprozesses $(R_t)_t$ ist an die Bestandsentwicklung

gekoppelt und durch die bei einem Verkauf in t realisierten Bruttoeinnahmen $v \cdot p_t - c(t)$ und die kontinuierlich anfallenden Werbeausgaben mit der effektiven Kostenrate $k(t) \cdot w_t$ charakterisiert. In Abhängigkeit der gewählten Preis-Werbekontrollen ergibt sich der zufällige bis zum Zeitpunkt t kumulierte Verkaufsgewinn, $0 \leq t \leq T$,

$$R_t := \int_0^t 1_{\{s < \tau\}} \cdot (v \cdot p_s - c(s)) dX_s - \int_0^t 1_{\{s < \tau\}} \cdot k(s) \cdot w_s ds. \quad (2.3)$$

Mit $G_t := R_T - R_t$ bezeichnen wir die zufälligen ab t kumulierten Gewinne, $0 \leq t \leq T$. Wir suchen eine bestmögliche nicht vorgreifende (Markov-)Politik aus gesteuerten Preis-Werbeentscheidungen, welche den erwarteten Nutzen $E(u(R_T)) := E(-e^{-\gamma R_T})$ der Gesamtverkaufsgewinne R_T maximiert. Die klassische exponentielle Nutzenfunktion $u(x) = -e^{-\gamma x}$, $\gamma > 0$, $x \in \mathbb{R}$, mit Werten in $(-\infty, 0)$ spiegelt dabei konstante absolute Risikoaversion wider. Sie ist durch den Koeffizienten $\gamma \equiv -u''(x)/u'(x)$ charakterisiert.

Der Zustandsraum unseres stochastischen Steuerungsproblems ist bestimmt durch den Zeitpunkt t , den Restbestand n und den akkumulierten Gewinn r , d.h. $(t, n, r) \in [0, T] \times \{0, 1, 2, \dots, N\} \times (-\infty, \infty)$. Für gewählte Markovkontrollen $(p_{n,r}(t), w_{n,r}(t))$ – welche zum Zeitpunkt t vom aktuellen Bestand $X_t = n$ und dem kumulierten Gewinn $R_t = r$ abhängen können – ist die Dynamik des gesteuerten Prozesses durch die Zustandsübergänge für (t, X_t, R_t) charakterisiert. Während hierfür im Anhang eine technische Beschreibung gegeben wird, vermitteln die Verkaufswahrscheinlichkeiten (2.2) eine intuitive vereinfachte Beschreibung der Bestands- bzw. Gewinnentwicklung, vgl. (2.3).

In Anlehnung an das Bellman-Prinzip bezeichnen wir für alle $0 \leq t \leq T \wedge \tau$, $0 \leq n \leq N$ und $r \in \mathbb{R}$ das Supremum von

$$E(-e^{-\gamma R_T} | X_t = n, R_t = r) \quad (2.4)$$

über alle zustandsabhängigen Markovschen Rückkopplungssteuerungen ab t als die Wertefunktion $J^*(t, n, r)$. Wir werden sehen, dass die Wertefunktion J^* für alle n und r stetig differenzierbar in t ist und die dem dynamischen Optimierungsproblem (2.1) – (2.4) zugeordnete Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (HJB), $n = 1, \dots, N$, $0 \leq t < T$, $r \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{\dot{W}_{n,r}(t)}{W_{n,r}(t)} + \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ \lambda(t, p, w) \cdot \left(1 - \frac{W_{n-1, r+v \cdot p - c(t)}(t)}{W_{n,r}(t)} \right) - \gamma \cdot k(t) \cdot w \right\} = 0. \quad (2.5)$$

mit den Randbedingungen, $r \in \mathbb{R}$,

$$W_{n,r}(T) = -e^{-\gamma r}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad \text{und} \quad W_{0,r}(t) = -e^{-\gamma r}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.6)$$

vgl. (2.4), erfüllt. Die Darstellung der HJB Gleichung (2.5) wird im Anhang weiterhin durch eine informelle Herleitung basierend auf einer zeitdiskreten Approximation gestützt. Die Einbettung des risikoaversen Zielfunktional in eine risikoneutrale Problemformulierung á la Brémaud (1980), Kapitel VII, basiert auf der Zunahme der Gewinnakkumulation in die Zustandsbeschreibung und der Verwendung der Nutzenfunktion u in der zustandsabhängigen Endauszahlung; das Auszahlungsfunktional wird dabei 0 gesetzt (vgl. C und Ψ in der

Notation von Brémaud). Diese Art der Einbettung findet sich ebenfalls bei Levin, McGill und Nediak (2008). Ähnliche Varianten der HJB-Gleichung für den Fall ohne Werbung, siehe Lim, Shanthikumar (2007) oder Feng, Xiao (2008), sind Spezialfälle von (2.5). Wir nehmen im Folgenden vorweg, dass die Lösung der Wertefunktion von der Form

$$J^*(t, n, r) = -e^{-\gamma r} \cdot e^{-\gamma \tilde{V}_n(t)} \quad (2.7)$$

ist, wobei die Funktion $\tilde{V}_n(t)$ unabhängig von r ist und die nichtlineare Differenzen-Differentialgleichung, $n = 1, \dots, N$, $0 \leq t < T$,

$$\dot{\tilde{V}}_n(t) + \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ \gamma^{-1} \cdot \lambda(t, p, w) \cdot \left(1 - e^{-\gamma(p - c(t) - \tilde{V}_n(t) + \tilde{V}_{n-1}(t))} \right) - k(t) \cdot w \right\} = 0, \quad (2.8)$$

mit den Randbedingungen

$$\tilde{V}_n(T) = 0, \quad 0 \leq n \leq N, \quad \text{und} \quad \tilde{V}_0(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.9)$$

löst. Mit der Beziehung

$$\tilde{V}_n(t) = -\gamma^{-1} \cdot \ln(-W_{n,r}(t)) - r,$$

vgl. (2.7), folgt, dass (2.8) - (2.9) in (2.5) - (2.6) übergeht. Da (2.8) mit (2.9) – wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden – eine eindeutige explizit darstellbare Lösung $\tilde{V}_n(t)$ hat, ist $W_{n,r}(t) := -e^{-\gamma r} \cdot e^{-\gamma \tilde{V}_n(t)}$ somit eine in t differenzierbare Lösung der HJB Gleichung (2.5) mit den Randbedingungen (2.6). Mit dem Verifizierungssatz Brémaud (1980), S.206, Corollary C2 ergibt sich dann, dass mit $J^* = W$ die Wertefunktion gefunden ist.

Mit dem separablen Ansatz $W_{n,r}(t) = -e^{-\gamma r} \cdot e^{-\gamma \tilde{V}_n(t)}$ folgt außerdem, dass die Maximierung in (2.5) unabhängig von den kumulierten Gewinnen r ist, und dass sich der Ausdruck (2.4) als $e^{-\gamma r} \cdot E(-e^{-\gamma G_t} | X_t = n)$ schreiben lässt. Das bedeutet, dass der zukünftige Erwartungsnutzen unabhängig von den kumulierten Gewinnen ist und nur vom Bestand und der Zeit abhängt. Diese Eigenschaft findet sich z.B. auch bei Li, Zhuang (2009) oder Bäuerle, Rieder (2013) im Kontext reiner Preismodelle. Betrachten wir demnach nur den erwarteten Zukunftsnutzen $E(-e^{-\gamma G_t} | X_t = n)$ so zeigt die Transformation $u^{-1}(E(u(G_t) | X_t = n))$, wobei $u^{-1}(z) := -\gamma^{-1} \cdot \ln(-z)$ ist, dass $\tilde{V}_n(t)$ als das maximale Sicherheitsäquivalent

$$-\gamma^{-1} \cdot \ln \left[E(-e^{-\gamma G_t} | X_t = n) \right].$$

zu interpretieren ist. Im Rahmen stochastischer Nutzenmaximierungsprobleme stellt das Sicherheitsäquivalent eine hilfreiche Größe dar, da sie im Gegensatz zum erwarteten Nutzen leicht zu interpretieren ist: Das Sicherheitsäquivalent einer Zufallsvariable G ist die Zahl χ , welche die Beziehung $u(\chi) = E(u(G))$ erfüllt. Der Wert χ ist also genau so gewählt, dass der risikoaverse Entscheidungsträger indifferent zwischen der sicheren Auszahlung χ und dem zufälligen Wert von G ist. Für konkav steigende Nutzenfunktionen folgt mit der Ungleichung von Jensen, dass das Sicherheitsäquivalent kleiner als der erwartete Gewinn $E(G)$ ist. Die Differenz zwischen beiden Größen wird als Risikoprämie bezeichnet. Linear

steigende Nutzenfunktionen korrespondieren mit dem risikoneutralen Fall; dabei gilt $u(E(G)) = E(u(G))$, und die Risikoprämie ist stets null.

3 Analytische Lösung

In diesem Abschnitt wollen wir das oben beschriebene Modell mit Hilfe der Lösung der HJB-Gleichung lösen. Durch die Betrachtung des Sicherheitsäquivalents kann das verallgemeinerte Modell auf eine dem Basismodell von Gallego, van Ryzin strukturell verwandte Form zurückgeführt werden. Dadurch gelingt es eine explizite Lösung für die Wertefunktion und damit für die optimale Politik zu konstruieren. Eine quantitative und qualitative Analyse der Lösungsformeln bietet die Möglichkeit eine gewisse ökonomische Einsicht in die Funktionsweise dynamischer Preis-Werbemodelle unter Risikobetrachtungen zu gewinnen.

In Anlehnung an Abschnitt 2 können wir davon ausgehen, dass \tilde{V} eine Lösung der HJB-Gleichung, $0 < n \leq N$, $0 \leq t < T$,

$$\dot{\tilde{V}}_n(t) + \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ \gamma^{-1} \cdot a(t) \cdot w^\delta \cdot e^{-\varepsilon \cdot p} \cdot \left(1 - e^{-\gamma(v \cdot p - c(t) - \Delta \tilde{V}_n(t))} \right) - k(t) \cdot w \right\} = 0. \quad (3.1)$$

mit den Randbedingungen (2.9) ist, wobei $\Delta \tilde{V}_n(t) := \tilde{V}_n(t) - \tilde{V}_{n-1}(t)$ die Opportunitätskosten des Sicherheitsäquivalents bezeichnet. Die Maximierung in (3.1) korrespondiert mit den folgenden notwendigen Bedingungen für optimale Preis- und Werbeentscheidungen, $0 < n \leq N$, $0 \leq t < T$,

$$p_n^*(t) = \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{v \cdot \gamma} \cdot \ln \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} + \frac{1}{v} \cdot \Delta \tilde{V}_n(t), \quad \text{und} \quad w_n^*(t) = \left(\frac{v \cdot \delta \cdot a(t)}{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)} \cdot e^{-\varepsilon \cdot p_n^*(t)} \right)^{1/(1-\delta)}.$$

Im Anhang wird gezeigt, dass die Bedingungen zweiter Ordnung tatsächlich erfüllt sind. Die Optimalitätsbedingungen beschreiben die optimalen Markov-Kontrollen in Abhängigkeit von Zeit und Zustand. Während die optimalen Werberaten eine Funktion der optimalen Preise sind, setzen sich letztere aus der Summe aus den Produktionskosten $c(t)$, einem festen Aufschlag $1/(v \cdot \gamma) \cdot \ln(1 + v \cdot \gamma / \varepsilon)$ und den Opportunitätskosten $\Delta \tilde{V}_n(t)$ zusammen. Der feste Aufschlag steigt mit geringerer Risikoaversion γ und ist von oben durch $1/\varepsilon$ beschränkt, vgl. $\gamma \rightarrow 0$. Eine Betrachtung der obigen Formeln ohne Opportunitätskosten liefert zudem eine untere Schranke $p_{\min}^{(\gamma)}(t)$ für die optimalen risikoaversen Preise sowie eine obere Schranke $w_{\max}^{(\gamma)}(t)$ für die optimalen Werberaten. Für die Preisschranke erhalten wir insbesondere

$$p_{\min}^{(\gamma)}(t) = \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{v \cdot \gamma} \cdot \ln \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{\varepsilon} = p_{\min}(t).$$

Wie wir später sehen werden, liefert der Fall $\gamma \rightarrow 0$ die Schranken $p_{\min}(t)$ und $w_{\max}(t)$ für das risikoneutrale Modell. Beachte, dass $p_{\min}(t)$ und $w_{\max}(t)$ die optimale Steuerung im (stationären) Modell mit unbeschränktem Bestand sind. Dass $\gamma \rightarrow 0$ wie üblich dem risikoneutralen Modell entspricht, verdeutlicht der Umstand, dass die obigen Formeln für den Fall $v = k(t) \equiv 1$ und $c(t) \equiv 0$ gegen die entsprechenden Ausdrücke in MacDonald, Rasmussen (2009) konvergieren.

Proposition 3.1. Sei $\lambda_n^*(t) := \lambda(t, p_n^*(t), w_n^*(t))$. Für alle Grade γ konstanter absoluter Risikoaversion ist das Verhältnis optimaler Werbe- und Verkaufsraten gegeben durch, $0 < n \leq N$, $0 \leq t < T$,

$$\frac{w_n^*(t)}{\lambda_n^*(t)} \equiv \frac{v \cdot \delta}{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)}. \quad (3.2)$$

Die erwarteten optimalen Werbeausgaben und die erwarteten Verkaufszahlen sind proportional

$$E\left(\int_0^t \lambda_n^*(s) ds\right) = E(N - X(t)) \equiv \frac{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)}{v \cdot \delta} \cdot E\left(\int_0^t w_n^*(s) ds\right).$$

Beweis. Siehe Anhang.

Für die kompaktere Darstellung der Parameterabhängigkeit verschiedener Formeln verwenden wir die Abkürzungen $d := \varepsilon / (v \cdot (1 - \delta))$ und

$$\tilde{\beta}(t) := \frac{k(t) \cdot \varepsilon}{v \cdot \delta} \cdot \left(\frac{v \cdot \delta \cdot a(t)}{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + v \cdot \gamma} \right)^{\frac{\varepsilon}{v \cdot \gamma \cdot (1-\delta)}} \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot c(t)}{v \cdot (1-\delta)}}.$$

Im Anhang wird gezeigt, dass die HJB-Gleichung (3.1) durch direkte Substitution der Optimalitätsbedingungen für die Kontrollen p^* und w^* in die nichtlineare Differenzen-Differentialgleichung, $0 < t < T$, $1 \leq n \leq N$,

$$\dot{\tilde{V}}_n(t) + \frac{\tilde{\beta}(t)}{d} \cdot e^{-d \cdot \Delta \tilde{V}_n(t)} = 0. \quad (3.3)$$

mit den obigen natürlichen Randbedingungen (2.9) übergeht. Die Lösung von (3.3) ist von ähnlicher Struktur wie die (eindeutige) Lösung des zeithomogenen risikoneutralen reinen Preismodells, vgl. Gallego, van Ryzin (1994), d.h. $a(t) \equiv a$, $c(t) = \delta = 0$ und $v = 1$. Daher kann die Lösung der Differenzen-Differentialgleichung (3.3) wie folgt konstruiert werden, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq n \leq N$:

$$\tilde{V}_n(t) = \frac{1}{d} \cdot \ln K_n(t), \quad \text{wobei } K_n(t) := \sum_{i=0}^n \tilde{B}(t)^i / i! \quad \text{und} \quad \tilde{B}(t) := \int_t^T \tilde{\beta}(s) ds. \quad (3.4)$$

Die Funktion $K_n(t) \geq 1$ ist somit die n -te Partialsumme der Exponentialreihe für das Argument $\tilde{B}(t)$. Da $\tilde{\beta}$ in a und v steigt bzw. in γ , ε , k , c und δ fällt, wächst die Funktion K in T , n , $\tilde{\beta}$, a , v und fällt in t , γ , ε , k , c , δ . Durch das schnelle Wachstum der in der Definition von K auftretenden Fakultätsfunktion ist es empfehlenswert die Rekursion $S_n(t) := S_{n-1}(t) \cdot \tilde{B}(t) / n$, ausgehend von $S_0(t) = 1$ zu verwenden, um $K_n(t) = \sum_{i=0}^n S_i(t)$ für alle n und t zu berechnen.

Theorem 3.1.

Ist die Verkaufsrate gegeben durch $\lambda(t, p, w) = a(t) \cdot w^\delta \cdot e^{-\varepsilon \cdot p}$ so hat das risikoaverse Problem, vgl. Abschnitt 2, die explizite feedback Lösung, $0 \leq t \leq T$, $1 \leq n \leq N$, $c(t) \geq -\gamma^{-1} \cdot \ln(1 + v \cdot \gamma / \varepsilon)$:

Wertefunktion:
$$\tilde{V}_n(t) = \frac{v \cdot (1 - \delta)}{\varepsilon} \cdot \ln K_n(t) \quad \text{bzw.} \quad W_{n,r}(t) = -e^{-\gamma r} \cdot K_n(t)^{-\gamma/d}, \quad r \in \mathbb{R}$$

optimaler Preis:
$$p_n^*(t) = \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{v \cdot \gamma} \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \right) + \frac{1 - \delta}{\varepsilon} \cdot \ln \left(\frac{K_n(t)}{K_{n-1}(t)} \right)$$

optimale Werberate:
$$w_n^*(t) = \frac{\delta \cdot v}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \tilde{\beta}(t) \cdot \frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)}$$

optimale Verkaufsrate:
$$\lambda_n^*(t) = \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \tilde{\beta}(t) \cdot \frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)}, \quad \text{wobei} \quad \tilde{\beta}(t) = \frac{-\dot{K}_n(t)}{K_{n-1}(t)} \text{ ist.}$$

Beweis. Die Herleitung im Anhang nutzt die Optimalitätsbedingungen und Formel (3.4).

Um die in Theorem 3.1 zusammengefasste Modelllösung zu illustrieren, betrachten wir ein einfaches zeithomogenes Beispiel. Für eine spezifische Parameterwahl sind die optimalen feedback Kontrollen in Abb. 1 dargestellt. Das linke Teilbild Abb. 1a zeigt die optimalen Preisentscheidungen für alle Restbestände n , $1 \leq n \leq N$, und Zeitpunkte t , $0 \leq t \leq T$; die entsprechenden optimalen Werberaten sind in Abb. 1b abgebildet. Während die optimalen Preise $p_n^*(t)$ in Zeit und Bestand fallen, steigen die optimalen Werberaten in t und n . Darüber hinaus fallen die Preise nicht unter den Wert $p_{\min}^{(\gamma)}$; die Werberaten sind dagegen von oben durch $w_{\max}^{(\gamma)}$ beschränkt.

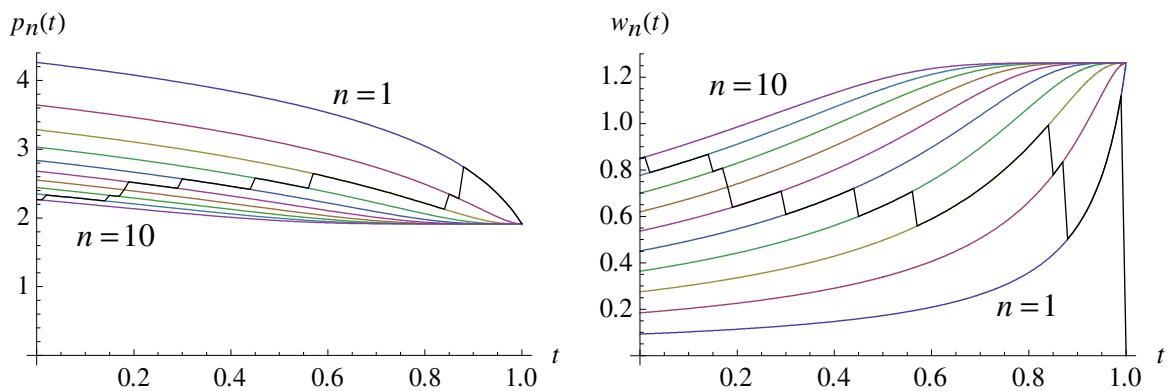


Abbildung 1. Darstellung der optimalen risikoaversen feedback Politik
($T=1$, $1 \leq n \leq 10$, $a=100$, $\varepsilon=k=v=c=1$, $\delta=0.1$, $\gamma=0.2$)

Die schwarze Linie in Abb. 1a und 1b illustriert die Anwendung der optimalen feedback Politik. Ausgehend vom Anfangsbestand $N=10$ in $t=0$ folgt die optimale Politik der zum Bestand $n=N$ zugeordneten Kurve. Sobald der erste Verkauf eintritt, verringert sich der Bestand um eine Einheit und die Preis-Werbetrajektorie der optimal gesteuerten Politik wird

auf der entsprechend nächsten Kurve fortgesetzt. Das bedeutet, dass der Preis im Anschluss an einen Verkauf nach oben springt und dann bis zum nächsten Verkauf wieder fällt. Falls alle N Artikel vor T verkauft werden, endet der Verkaufsprozess vorzeitig. In Abb. 1b wird dieser Fall durch die kurz bevor T auf null springende schwarze Trajektorie veranschaulicht.

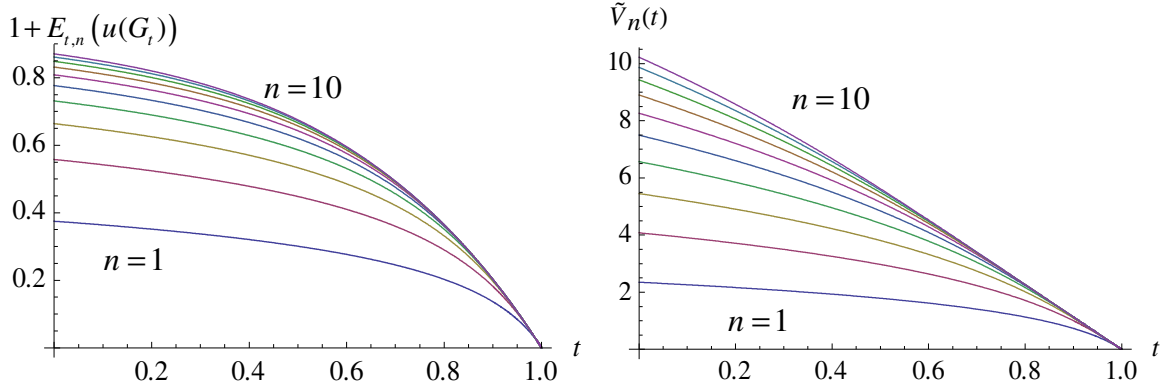


Abbildung 2. Erwarteter Nutzen (links) und Sicherheitsäquivalent (rechts)
($T=1$, $1 \leq n \leq 10$, $a(t)=100$, $\varepsilon=k=v=c=1$, $\delta=0.1$, $\gamma=0.2$)

Für das obige Beispiel ist der erwartete Nutzen in Abb. 2a und das Sicherheitsäquivalent in Abb. 2b abgebildet. In Analogie zur vorherigen Abbildung der optimalen Kontrollen werden beide Größen jeweils für alle Zeitpunkte t durch Kurven für verschiedene Restbestände n dargestellt. Um den erwarteten Nutzen

$$E_{t,n}(u(G_t)) := E[u(G_t) | X_t = n] = W_{n,0}(t) = -K_n(t)^{-\gamma/d} \in [-1, 0]$$

im positiven Zahlenbereich anzugeben wurde der Wert 1 addiert. Das Sicherheitsäquivalent beschreibt die sichere Auszahlung, welche für den (risikoaversen) Entscheider einen fairen Gegenwert zu den zufälligen Verkaufsgewinnen darstellt. In unserem Beispiel steigen erwarteter Nutzen und Sicherheitsäquivalent konkav im Bestand und fallen konkav in der Zeit.

	t	n	ε	γ	c	a	v	k
\tilde{V}, K	–	+	–	–	–	+	+	–
$\Delta \tilde{V}$	–	–	–	–	–	+	+	–
$\tilde{\beta}$	0	0	–	–	–	+	+	–
p	–	–	–	–	+	+	+, 0**	–
w	+	+	–	+/-	–	+	+	–
λ	+	+	–	+***	–	+	+	–

Tabelle 1. Sensitivitätseigenschaften charakteristischer Größen (zeithomogener Fall)

* wenn $\gamma=0$, $c=0$; ** wenn $\delta=0$, $\gamma=0$, $c=0$; *** wenn $\delta=0$ (sonst „+/-“).

Für allgemeine Strukturaussagen können die Ergebnisse in Theorem 3.1 herangezogen werden. Die Herleitung expliziter Formeln für \tilde{V} , p^* und w^* sowie weiterer charakteristischer Größen ermöglicht es, ihre Abhängigkeit bzgl. der verschiedenen Modellparameter analytisch zu erfassen. Derartige Sensitivitätsergebnisse sind in Tabelle 1

für den zeithomogenen Fall zusammengefasst. Die Symbole “+” und “–” deuten an ob eine Größe, gegeben in der ersten Spalte, steigt oder fällt, wenn die entsprechende Größe der ersten Zeile steigt. Der Eintrag „0“ bedeutet, dass keine Abhängigkeit besteht; „+/-“ zeigt an, dass i.A. keine monotone Abhängigkeit nachgewiesen werden kann. Letzteres ist auch für den Einfluss von δ der Fall. Ein Grund dafür ist, dass das Grenzverhältnis zwischen den Kosten und der Wirkung von Werbung, gegeben durch $1/\delta \cdot w^{1/\delta}$, nicht monoton in der Werbeelastizität δ ist.

Aus der allgemeinen parameterabhängigen Lösung des Modells lassen sich die Lösungen wichtiger Spezialfälle direkt ableiten. Im risikoaversen *reinen Preismodell* ohne zusätzliche Werbeeffekte, d.h. wenn speziell $\delta=0$ gesetzt ist, erhalten wir die entsprechenden Lösungsformeln indem wir in Theorem 3.1 anstelle der Parameter $\tilde{\beta}$ und d die veränderten Parameter $d^{(pp)} := \varepsilon / v$ und $\tilde{\beta}^{(pp)}(t) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\beta}(t) = v \cdot a(t) \cdot e^{-\varepsilon \cdot c(t)/v} \cdot (\varepsilon / (\varepsilon + v \cdot \gamma))^{\varepsilon + v \cdot \gamma}$ verwenden.

In Abschnitt 6 weisen wir u.a. nach, dass sich die konstruierte Lösung auch auf den *risikoneutralen* Fall übertragen lässt. Wir nehmen an dieser Stelle vorweg, dass die mit der HJB-Gleichung des risikoneutralen Modells assoziierte Differenzen-Differentialgleichung mit (3.3) für $\gamma \rightarrow 0$ zusammenfällt. Die Lösung der entsprechenden Wertefunktion $V_n(t) = \sup E_{t,n}(G_t)$, $0 \leq n \leq N$, $0 \leq t \leq T$ des risikoneutralen Modells – welche die optimalen erwarteten zukünftigen Gewinne beschreibt – ergibt sich mit $V_n(t) := \lim_{\gamma \rightarrow 0} \tilde{V}_n(t)$ und ist durch die Parameter $d := \varepsilon / (v \cdot (1 - \delta))$ sowie

$$\beta(t) := \lim_{\gamma \rightarrow 0} \tilde{\beta}(t) = \frac{k(t) \cdot \varepsilon}{v \cdot \delta} \cdot \left(\frac{v \cdot \delta \cdot a(t)}{k(t) \cdot \varepsilon \cdot e} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot c(t)}{v(1-\delta)}} \stackrel{\delta \rightarrow 0}{=} \frac{\varepsilon}{v} \cdot \left(\frac{v \cdot a(t)}{\varepsilon \cdot e} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot c(t)}{v}} \quad (3.5)$$

charakterisiert. Für den Spezialfall $v = k(t) \equiv 1$, $c(t) \equiv 0$ ergibt sich in diesem Zusammenhang mit $\delta = 0$ die Modelllösung von Gallego, van Ryzin (1994); mit $\delta > 0$ verifiziert man die Lösung von Rasmussen, MacDonald (2009).

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt mit der Auswertung des allgemeinen Modells beschäftigen, geben wir noch die folgende Interpretation für den Parameter $\beta(t)$: wird die Gewinnrate $a(t) \cdot w^\delta \cdot e^{-\varepsilon \cdot p} \cdot (v \cdot p - c(t))$ maximierende risikoneutrale Politik $(p_{\min}(t), w_{\max}(t))$ angewandt (vgl. stationärer Fall ohne Bestandsrestriktion), so werden durchschnittlich $\beta(t)$ Artikel pro Zeiteinheit verkauft.

Im risikoaversen Modell ist die optimale Verkaufsrate für den asymptotischen Fall $n \rightarrow \infty$ gegeben durch $\lambda(t, p_{\min}^{(\gamma)}(t), w_{\max}^{(\gamma)}(t)) = (1 + v \cdot \gamma / \varepsilon) \cdot \tilde{\beta}(t)$, d.h. der Verkaufsprozess folgt einem inhomogenen Poissonprozess. Ist die Nachfrage zudem zeithomogen so ist eine konstante Preis-Werbepolitik optimal und die Verkaufszeitpunkte sind Erlangverteilt. Für weitere Auswertungen dieses Spezialfalls sei auf MacDonald, Rasmussen (2009) verwiesen.

4 Auswertung und weitere Eigenschaften

In diesem Abschnitt wollen wir die gefundenen optimalen Preis-Werbepolitiken des zeitinhomogenen risikoaversen Modells auswerten und ihre Performance studieren. Insbesondere sind wir daran interessiert den Einfluss des Grades der Risikoaversion auf die Gewinnverteilung zu erfassen. Um Verkaufs- und Gewinnprozesse effizient simulieren zu können, bestimmen wir die (bedingte) Verteilung der Verkaufszeitpunkte. Darüber hinaus wird durch die Berechnung von Zustands-wahrscheinlichkeiten die Möglichkeit gegeben die Charakteristik der Bestandsprozesse genau zu analysieren.

Die nachfolgenden Ergebnisse basieren auf der expliziten Darstellung der optimalen Verkaufsintensität λ^* des stochastischen Preis-Werbeproblems. Die entsprechende Formel, siehe Theorem 3.1, in Verbindung mit der dynamischen CARA-Version der Dorfman-Steiner Identität (3.2) bietet die Möglichkeit verschiedene charakteristische Größen des Modells zu berechnen.

Beispielsweise lässt sich mit Hilfe der Zustandswahrscheinlichkeiten q die erwartete Verkaufszahl sowie die erwarteten Preis-Werbeaktionen als Funktion der Zeit bestimmen. Im Folgenden beschreiben wir eine rekursive Methode die Wahrscheinlichkeiten $q_n(t) := P[X(t) = n]$, für alle Zeitpunkte t und Zustände n zu berechnen; $(X(t))_t$ bezeichnet dabei den optimal gesteuerten Prozess noch zu verkaufender Artikel.

Theorem 4.1. Sei $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 \leq \delta < 1$, und der Anfangsbestand gegeben mit $X(0) = N$. Im zeitinhomogenen Modell mit CARA-Risikoaversion sind die Zustandswahrscheinlichkeiten $q_n(t)$ durch die folgende Rekursion beschrieben, $0 \leq t \leq T$,

$$q_N(t) = \left(\frac{K_N(t)}{K_N(0)} \right)^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon}}$$

$$\text{und } q_{n-1}(t) = \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot K_{n-1}(t)^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon}} \cdot \int_0^t \frac{\tilde{\beta}(s) \cdot q_n(s)}{K_n(s) \cdot K_{n-1}(s)^{v \cdot \gamma / \varepsilon}} ds \quad \text{für } 1 \leq n \leq N, \quad (4.1)$$

Beweis. Siehe Anhang.

Um die Verteilung der stochastischen Gewinne, welche mit der Anwendung der optimalen Politik assoziiert sind, zu analysieren, eignen sich Simulationsstudien. Auf Basis simulierter Verkäufe lassen sich Trajektorien für kumulierte Gewinne, Umsätze und Werbeausgaben, aber auch der optimalen Kontrollen bestimmen. Um Trajektorien $(X(t))_t$ effizient in stetiger Zeit zu simulieren, nutzen wir den folgenden Ansatz, welcher im Kern auf McAfee, te Velde (2008) im Kontext des isoelastischen reinen Preismodells zurückgeht. Die Schlüsselidee des effizienten Simulationsalgorithmus ist die Eigenschaft, dass Realisationen der zufälligen Verkaufszeitpunkte aus transformierten unabhängigen auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen generiert werden können.

Sei in diesem Zusammenhang τ_j , $1 \leq j \leq N$, der zufällige Zeitpunkt der j -ten Verkaufs und sei $\tau_0 := 0$. Wir definieren zudem abkürzend den Hilfsparameter $\theta := (\varepsilon + v \cdot \gamma) / \varepsilon \geq 1$. Die optimale Intensität $\lambda_n^*(t)$, lässt sich damit auch schreiben als, $1 \leq n \leq N$, $0 \leq t < T$,

$$\lambda_n^*(t) = \theta \cdot \frac{-\dot{K}_n(t)}{K_n(t)},$$

vgl. Theorem 3.1. Auf Basis dieser Darstellung wird im Anhang gezeigt, dass für alle $0 \leq \tau_j < t \leq T$, $1 < j \leq N$, die Beziehung

$$P(\tau_j \leq t | \tau_{j-1}) = 1 - \left(\frac{K_{N-j+1}(t)}{K_{N-j+1}(\tau_{j-1})} \right)^\theta. \quad (4.2)$$

gilt. Des Weiteren, beweisen wir, dass die (bedingte) Wahrscheinlichkeit $P(\tau_j \leq t | \tau_{j-1})$, vgl. (4.2), für alle $1 \leq j \leq N$, $0 \leq t < T$, einer abgeschnittenen Gleichverteilung auf $[0,1]$ entspricht, d.h. es gilt

$$P(\tau_j \leq t | \tau_{j-1}) \sim \min(U(0,1), 1 - K_{N-j+1}(\tau_{j-1})^{-\theta}).$$

Da die Funktion $-\dot{K}_n(t) = \tilde{\beta}(t) \cdot K_{n-1}(t)$ positiv ist, folgt, dass K streng monoton in t fällt. Demzufolge besteht für jedes feste $n \geq 1$ eine eindeutige Beziehung zwischen t und der Funktion $K_n(t)$. Um für einen gegebenen Wert $y = K_n(\xi)$, $1 = K_n(T) \leq y \leq K_n(0)$, den korrespondierenden Zeitpunkt $\xi \in [0, T]$ zu bestimmen, nutzen wir die Umkehrfunktion $K_n^{-1}(y)$, welche für alle n streng monoton fallend in y ist.

Proposition 4.1. Sei $(Z_j)_{1 \leq j \leq N}$ eine Familie unabhängiger gleichverteilter Zufallsvariablen auf $[0,1]$. Mit $\tau_0 = 0$ definieren wir die zufälligen Verkaufszeitpunkte τ_j , $1 \leq j \leq N$, rekursiv mit

$$\tau_j = \begin{cases} K_{N-j+1}^{-1} \left(\max \left(1, K_{N-j+1}(\tau_{j-1}) \cdot Z_j^{1/\theta} \right) \right) & , \tau_j < T \\ T & , \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.3)$$

Ist $\tau_j = T$ sind die verbleibenden $N - j + 1$ Artikel als unverkauft zu betrachten.

Beweis. Siehe Anhang.

Die Verteilung der Verkaufszeitpunkte fällt demnach bei Anwendung der optimalen Politik mit den in (4.3) definierten Zeitpunkten zusammen. Für beliebige (simulierte) Folgen von realisierten Verkaufszeitpunkten τ_j kann der Prozess der zugeordneten kumulierten Gewinne R_t als Differenz der Umsätze und Werbeausgaben berechnet werden. Die kumulierten (Netto)- Umsätze U_t sind direkt als Summe der entsprechenden Verkaufsmargen bis zum Zeitpunkt t darstellbar:

$$U_t := \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ \tau_j < t}} (v \cdot p_{N-j+1}^*(\tau_j) - c(\tau_j)).$$

Die bis zum Zeitpunkt t kumulierten Werbeausgaben W_t sind per Definition aus der Summe der über die Partition der Zeitintervalle mit gleichem Bestand integrierten optimalen Werberaten zu berechnen. Im Anhang wird erläutert, dass sich diese Berechnung wie folgt vereinfachen lässt:

$$W_t := \sum_{\substack{j=0, \dots, N-1 \\ \tau_j \leq t}} \int_{\tau_j}^{\min(\tau_{j+1}, t)} k(s) \cdot w_{N-j}^*(s) ds = \frac{v \cdot \delta}{\varepsilon} \cdot \sum_{\substack{j=0, \dots, N-1 \\ \tau_j \leq t}} \ln \frac{K_{N-j}(\tau_j)}{K_{N-j}(\min(\tau_{j+1}, t))}.$$

Schließlich erhalten wir mit $R_t = U_t - W_t$ die (simulierten) kumulierten Verkaufsgewinne, welche dann beliebig ausgewertet werden können. Beispielsweise lässt sich durch die Erstellung sehr vieler Simulationen die erwartete Gewinnentwicklung auch als Funktion der Zeit darstellen. Der Gesamtgewinn $R_T = G_0$ stellt dabei im Hinblick auf das ursprüngliche Zielkriterium die wichtigste Größe dar.

Um zu erfassen wie sich Risikoaversion in unserem Modell auswirkt, untersuchen wir das folgende zeithomogene Beispiel mit *verschiedenen* Risikokoeffizienten γ . Abb. 3a zeigt die simulierte Gewinnverteilung des Gesamtgewinns in Abhängigkeit von $0 < \gamma \leq 2.5$, wobei den Ergebnissen für jeden einzelnen Wert γ 10,000 Simulationen zugrunde liegen.

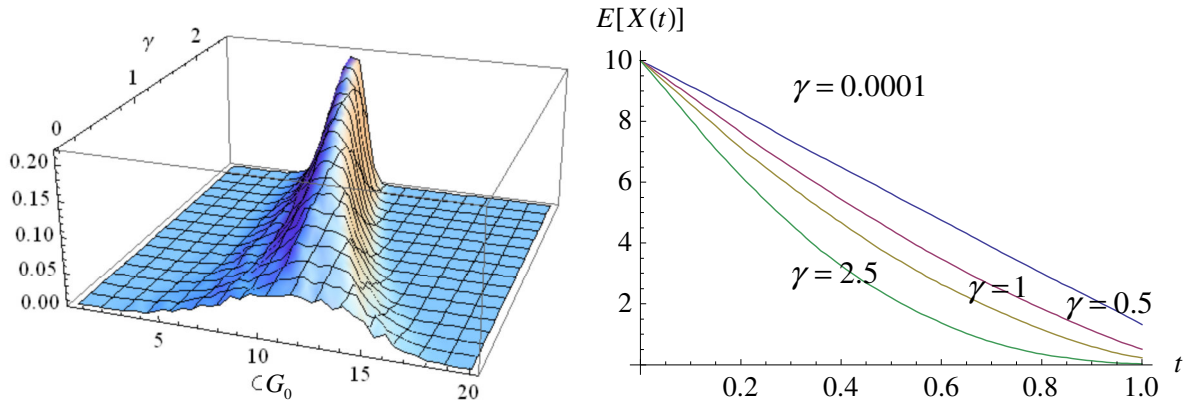


Abbildung 3. Gewinnverteilungen und erwartete Bestandsentwicklungen für verschiedene γ ($T=1$, $N=10$, $a=100$, $\varepsilon=2$, $\delta=0.1$, $c=k=v=1$, $0 < \gamma \leq 2.5$)

Es ist zu beobachten, dass höhere Werte für γ zu einer Konzentration der Gewinnverteilung führen, wobei der erwartete Gewinn abnimmt. In Abb. 3b ist die erwartete Bestandsentwicklung für vier verschiedene γ -Werte als Funktion der Zeit dargestellt. Der Fall $\gamma=0.0001$, welcher durch einen linearen Abverkauf gekennzeichnet ist, spiegelt dabei im Wesentlichen die Ergebnisse des risikoneutralen Modells wider. Abb. 3b ist zudem zu entnehmen, dass der Abverkauf schneller und die verkaufte Gesamtmenge im Mittel größer ist, je größer die Risikoaversion ist.

γ	$\tilde{V}_N(0)$	$E(G_0)$	$\sigma(G_0)$	$\%E_{RN}$	$\%Var_{RN}$	$E(X_T)$
(0)	11.033	11.033	3.042	100.00	100.00	1.316
0.1	10.613	10.890	2.833	99.91	86.71	1.076
0.2	10.224	10.818	2.654	99.26	76.09	0.902
0.3	9.861	10.706	2.506	98.23	67.87	0.770
0.5	9.204	10.461	2.202	95.98	52.39	0.532
0.7	8.624	10.159	1.954	93.21	41.26	0.376
1.0	7.870	9.722	1.621	88.05	31.92	0.232
2.0	6.051	8.169	1.086	73.99	14.31	0.064
4.0	4.086	6.093	0.642	55.18	5.01	0.010

Tabelle 2. Simulierte charakteristische Größen für verschiedene Risikoaversionsgrade ($T = 1$, $N = 10$, $a = 100$, $\varepsilon = 2$, $\delta = 0.1$, $c = k = v = 1$, $\gamma \in (0, 4]$)

Die erste Spalte von Tabelle 2 enthält verschiedene Werte für γ zwischen 0 und 4. Der Eintrag “(0)” deutet den risikoneutralen Fall an. Während $E(G_0)$ und $\sigma(G_0)$ den erwarteten Gesamtgewinn bzw. dessen Standardabweichung angeben, stehen die Bezeichnungen $\%E_{RN}$ und $\%Var_{RN}$ in der ersten Zeile für den prozentualen Anteil des erwarteten Gewinns bzw. der Varianz im Vergleich zum risikoneutralen Fall. In der letzten Spalte ist der erwartete Endbestand angegeben.

Die in Tabelle 2 zusammengefassten charakteristischen Größen, welche mit dem optimalen Verkauf zu verschiedenen Risikoaversionsgraden verbunden sind, bieten gleichzeitig eine vortreffliche Entscheidungsgrundlage. Die Zahlen ermöglichen einem Entscheidungsträger aus der Menge verschiedener Risikoprofile das von ihm bevorzugte auszuwählen. Beispielsweise bietet die mit $\gamma = 0.5$ assoziierte Politik – im Vergleich zum risikoneutralen Fall – nahezu 96% der (maximalen) erwarteten Gewinne bei nur etwas mehr als der Hälfte der Varianz (52.39%). Die Paare aus erwartetem Gewinn und Standardabweichung bilden den sogenannten „effizienten Rand“, welcher weiterführend auch für „Value-at-Risk“ Betrachtungen herangezogen werden kann.

5 Erwartete Preisentwicklung

In diesem Abschnitt wollen wir die erwartete Preisentwicklung untersuchen. Wir zeigen, dass die erwarteten Preise langfristig fallen, aber solange $n > 1$ ist, kurzfristig steigen können. Dieses unimodale Verhalten wird im risikoneutralen Fall ohne Werbung und ohne Produktionskosten auch bei Berman, Hu, Pang (2013) beschrieben. In unserem allgemeineren Modell hängt das Preisbuckel-Verhalten vom zeitlichen Verlauf der Produktionskosten, nicht aber von der endogenisierten Werbung oder dem Grad der Risikoaversion ab.

Im Folgenden wollen wir anhand der mit der optimalen Politik verbundenen erwarteten Preisentwicklung untersuchen, ob es sich für einen einzelnen Kunden lohnt auf fallende Preise zu warten. Wir untersuchen zu diesem Zwecke die kurzfristige Entwicklung erwarteter Preise. Eine kurze Zeit h zu warten, würde sich in diesem Kontext *nicht* auszahlen, wenn der erwartete Angebotspreis im Zeitpunkt $t + h$ höher als der aktuelle im Zeitpunkt t beobachtete Preis ist, d.h. wenn

$$p_n(t) < E_{t,n} [p_{X(t+h)}(t+h)]$$

gilt. Da für „kleine“ h ein Verkauf approximativ mit der Wahrscheinlichkeit $\lambda^*(t) \cdot h$ innerhalb der Zeit zwischen t und $t+h$ stattfindet, betrachten wir die äquivalente Ungleichung

$$p_n(t) < \lambda_n(t) \cdot h \cdot p_{n-1}(t+h) + (1 - \lambda_n(t) \cdot h) \cdot p_n(t+h) + o(h).$$

Für $h \rightarrow 0$ ist letztere Ungleichung demnach erfüllt, wenn

$$-\dot{p}_n(t) < \lambda_n(t) \cdot (p_{n-1}(t) - p_n(t))$$

gilt. Im Anhang weisen wir nach, dass diese Beziehung für alle Zeitpunkte t und für alle Risikoaversionskoeffizienten γ immer erfüllt ist, wenn $n > 1$ ist und die (differenzierbare) Produktionskostenfunktion $c(t)$ nicht in t fällt.

Theorem 5.1. Wenn $\dot{c}(t) \geq 0$ und $n > 1$ ist, dann ist zu jedem Zeitpunkt kurzfristig mit einem Preisanstieg zu rechnen. Im Fall $n = 1$ fallen die optimalen Preise in t , wenn $\dot{c}(t) \leq 0$ gilt.

Es lohnt sich also unter den genannten Bedingungen i.A. *nicht* auf unmittelbar fallende Preise zu spekulieren. Im Sonderfall $n = 1$ mag es trotz fallender Preise ebenfalls unvorteilhaft sein mit der Kaufentscheidung zu warten, da die unmittelbare Gefahr besteht leer auszugehen. Nichtsdestotrotz, kann es sich dennoch lohnen eine *längere* Zeit zu warten, da die erwarteten Preise (unter der Bedingung der Verfügbarkeit von Artikeln) nach einer Phase des Anstiegs zum Ende des Zeithorizontes wieder fallen, vgl. Abb. 4a am Beispiel der Kurve $E_{0,N}[p_{X_i}(t)]$. Dieses unimodale Verhalten finden wir auch im isoelastischen Modell, siehe Kapitel 1 (Helmes, Schlosser (2013)). Für ähnliche Ergebnisse erwarteter Preisentwicklungen in allgemeineren risikoneutralen reinen Preismodellen sei auf Xu, Hopp (2009) und Berman, Hu, Pang (2013) verwiesen.

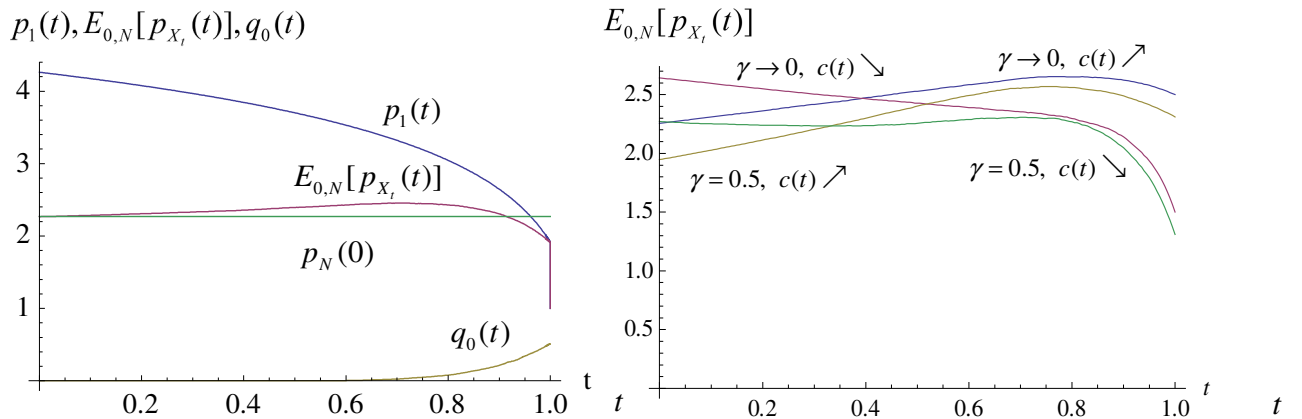


Abbildung 4. Erwartete Preise für $c=1$, $\gamma=0.2$ und $c(t)=1 \pm 0.5 \cdot t/T$ vs. $\gamma \in \{0+, 0.5\}$ ($T=1$, $N=10$, $a=100$, $\varepsilon=k=v=1$, $\delta=0.1$)

Im Falle, dass der Endpreis, gegeben durch $p_{\min}^{(\gamma)}(T) = c(T)/v + 1/(v \cdot \gamma) \cdot \ln(1 + v \cdot \gamma \cdot \varepsilon)$, unter dem aktuellen Angebotspreis liegt, ist aus Kundensicht die mögliche Einsparung gegenüber einem vorzeitigen Ausverkauf abzuwägen. Im Beispiel von Abb. 4a wird die Situation für den Anfangszeitpunkt $t=0$ und $N=10$ Artikel betrachtet, wobei die grüne Gerade das Niveau des Anfangspreises $p_N(0) = 2.267$ veranschaulicht. Der Endpreis beträgt $p_{\min}^{(\gamma)} = 1.912$. Die Graphik zeigt, dass im Mittel erst ab $t=0.93$ mit einem niedrigeren Preis als 2.267 zu rechnen ist. Zu diesem Zeitpunkt ist die Wahrscheinlichkeit eines Ausverkaufs $q_0(t) = P[X_t = 0 | X_0 = N]$ bereits auf einem signifikanten Niveau; bis zum Ende des Zeithorizonts T erreicht sie $q_0(T) = 0.52$. Das bedeutet, dass sich der niedrige Endpreis 1.912 nur mit einer 52%-igen Wahrscheinlichkeit realisieren lässt.

Als weitere Variante des zeithomogenen Beispiels, vgl. Abb. 4a, zeigt Abb. 4b vier erwartete Preisentwicklungen für Fälle mit linear steigenden und fallenden Produktionskosten, d.h. $c(t) = 1 \pm 0.5 \cdot t/T$, vgl. „ \nearrow “ und „ \searrow “, bzw. mit und ohne Risikoaversion, d.h. $\gamma = 0.5$ und $\gamma \rightarrow 0$. Der Verlauf der Preiskurven ist im ersten Teil des Planungshorizonts durch die Funktion $c(t)$ geprägt; am Ende des Horizonts zeigt sich mehr oder weniger stark der bereits beschriebene Preisbuckel. Vergleicht man die Fälle mit jeweils gleichen Stückkosten, sind die Preise im Falle mit Risikoaversion kleiner, und der Preisbuckel ist stärker betont.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei darauf hingewiesen, dass durch die Möglichkeit der Betrachtung zeitabhängiger Produktionskosten auch Lagerkosten und Restwerte für unverkaufte Artikel internalisiert werden können. Wir verweisen an dieser Stelle auf den in Kapitel 5, Abschnitt 5, vorgestellten Ansatz.

6 Konvergenz zum Deterministischen Modell

In diesem Abschnitt betrachten wir am Beispiel des risikoneutralen Modells den Verkauf von Einheiten beliebiger Größe. Unter Verwendung von Teileinheiten der Größe h ist der Zustandsraum gegeben durch $\{0, h, 2h, \dots, N\}$, wobei wir annehmen, dass N ein Vielfaches von h ist. Sämtliche Größen wie Preis oder Produktionskosten geben wir weiterhin pro ganze Verkaufseinheit der Größe 1 an. Der Preis einer Teileinheit der Größe h ist somit $p \cdot h$, die Stückkosten betragen $c(t) \cdot h$.

Die Verkaufsrate sei nun definiert als die Sprungintensität $\lambda^{(h)}(t, p, w)$, welche mit dem durchschnittlichen Verkauf von $\lambda^{(h)}/h$ Teileinheiten der Größe h pro Zeiteinheit korrespondiert. Ist h kleiner als die Referenzgröße 1, so entspricht dies einer höheren Anzahl von Sprüngen kleinerer Größe. Die assoziierte HJB-Gleichung für die Wertefunktion $V_n^{(h)}(t)$ des risikoneutralen stochastischen Steuerungsproblem mit Teileinheiten der Größe h ist gegeben durch, $0 \leq t < T$, $n = h, 2h, \dots, N$,

$$\dot{V}_n^{(h)}(t) + \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ \lambda^{(h)}(t, p, w) / h \cdot (v \cdot p \cdot h - c(t) \cdot h - \Delta V_n^{(h)}(t)) - k(t) \cdot w \right\} = 0,$$

wobei $\Delta V_n^{(h)}(t) := V_n^{(h)}(t) - V_{n-h}^{(h)}(t)$ wieder die Opportunitätskosten bezeichnet. Die natürlichen Randbedingungen lauten $V_n^{(h)}(T) = 0$, $0 \leq n \leq N$, und $V_0^{(h)}(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$. Durch einfache Umformung erhalten wir die folgende äquivalente Version der obigen HJB-Gleichung, vgl. (3.1),

$$\dot{V}_n^{(h)}(t) + \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ \lambda^{(h)}(t, p, w) \cdot (v \cdot p - c(t) - \Delta V_n^{(h)}(t)/h) - k(t) \cdot w \right\} = 0.$$

Die Optimalitätsbedingungen der feedback Preise (pro ganze Einheit) und Werberaten sind gegeben durch, $0 \leq t < T$, $n = h, 2h, \dots, N$,

$$p_n^{(h)}(t) = \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\Delta V_n^{(h)}(t)}{v \cdot h} \quad \text{und} \quad w_n^{(h)}(t) = \left(\frac{v \cdot \delta \cdot a(t)}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot e^{-\varepsilon \cdot p_n^{(h)}(t)} \right)^{1/(1-\delta)}.$$

Die mit der HJB-Gleichung korrespondierende Differenzen-Differentialgleichung lautet, vgl. (3.3),

$$\dot{V}_n^{(h)}(t) + \frac{\beta(t)}{d} \cdot e^{-d \cdot \Delta V_n^{(h)}(t)/h} = 0, \quad (6.1)$$

wobei $d := \varepsilon/(v \cdot (1-\delta))$ und $\beta(t)$ den bereits in Abschnitt 3, vgl. (3.5), definierten Größen entsprechen. Aufgrund der strukturellen Ähnlichkeit von (6.1) und (3.3) lässt sich die Lösungsformel für den Referenzfall $h=1$ auf den Fall $h>0$ unter Verwendung der Terme $\beta(t)/h$ und d/h verallgemeinern. Die explizite Lösung der Gleichung (6.1) ist somit gegeben durch

$$V_n^{(h)}(t) = \frac{h}{d} \cdot \ln K_n^{(h)}(t), \quad \text{wobei} \quad K_n^{(h)}(t) := \sum_{i=0, h, \dots}^n (B(t)/h)^{i/h} \cdot \frac{1}{(i/h)!},$$

und $B(t) := \int_t^T \beta(s) ds$ ist. Beachte, dass die Summation in der Definition von $K_n^{(h)}(t)$ über $n/h+1$ Summanden läuft. In Analogie zu Theorem 3.1 sind die optimalen risikoneutralen Kontrollen für alle h gegeben durch, $0 \leq t < T$, $n = h, 2h, \dots, N$, $c(t) \geq -v/\varepsilon$,

$$p_n^{(h)}(t) = \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1-\delta}{\varepsilon} \cdot \ln \left(\frac{K_n^{(h)}(t)}{K_{n-h}^{(h)}(t)} \right) \quad \text{und} \quad w_n^{(h)}(t) = \beta(t) \cdot \frac{\delta \cdot v}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \frac{K_{n-h}^{(h)}(t)}{K_n^{(h)}(t)}.$$

Auf Basis der resultierenden optimalen Verkaufsrate $\lambda_n^{(h)}(t) = \beta(t) \cdot K_{n-h}^{(h)}(t)/K_n^{(h)}(t)$ und der Beziehung $\lambda_n^{(h)}(t)/h = -\dot{K}_n^{(h)}(t)/K_n^{(h)}(t)$ lässt sich der Verkaufsprozess genauer auswerten. Insbesondere ist es im risikoneutralen Fall möglich die Zustandswahrscheinlichkeiten $q_n^{(h)}(t) := P[X(t) = n]$ für alle t und n in expliziter Form anzugeben.

Proposition 6.1. Im risikoneutralen Modell sind die Zustandswahrscheinlichkeiten, $0 \leq t \leq T$, $n = 0, h, 2h, \dots, N-h, N$ gegeben durch

$$q_n^{(h)}(t) = \frac{K_n^{(h)}(t)}{K_N^{(h)}(0)} \cdot \frac{(\bar{B}(t)/h)^{N/h-n/h}}{(N/h-n/h)!}, \quad (6.2)$$

wobei $\bar{B}(t) := \int_0^t \beta(s) ds = B(0) - B(t)$ ist. Des Weiteren gilt

$$(i) \text{ erwarteter Bestand: } E\left(X_t^{(h)} \mid X_0^{(h)} = N\right) = \sum_{n=0, h, \dots}^N n \cdot q_n^{(h)}(t) = N - \frac{\bar{B}(t)}{h} \cdot \frac{K_{N-h}^{(h)}(0)}{K_N^{(h)}(0)}$$

$$(ii) \text{ erwartete Preise: } E\left(p_{X_t}^{(h)}(t) \mid X_0^{(h)} = N\right) = \sum_{n=0, h, \dots}^N p_n^{(h)}(t) \cdot q_n^{(h)}(t)$$

(iii) erwartetes Verkaufsende im zeithomogenen Fall:

$$E\left(\tau^{(h)} \mid X_0^{(h)} = N\right)^{\text{hom}} = T - \left(1 - \frac{N/h \cdot (\beta \cdot T/h)^{N/h}}{(N/h+1)! \cdot K_N^{(h)}(0)}\right) \cdot q_0^{(h)}(T) \cdot T$$

$$(iv) \text{ erw. Werbeausgaben: } E\left(W_t^{(h)} \mid X_0^{(h)} = N\right) = \frac{v \cdot \delta}{\varepsilon} \cdot \bar{B}(t) \cdot \frac{K_{N-h}^{(h)}(0)}{K_N^{(h)}(0)}.$$

Beweis. Siehe Anhang. Der Beweis von (6.2) und (i) ist dabei angelehnt an McAfee, te Velde (2006) für das zeithomogene reine Preismodell, d.h. $\delta = 0$ und $v=k=h=1$.

Die Zustandswahrscheinlichkeiten in Proposition 6.1 enthalten insbesondere auch die Ausverkaufswahrscheinlichkeit $q_0^{(h)}(t)$. Mittels (i) lässt sich zudem eine explizite Formel für die erwartete Anzahl verkaufter Artikel angeben. Beachte, dass im zeithomogenen risikoneutralen Modell die optimalen erwarteten Verkäufe linear in der Zeit sind, während im risikoaversen Modell die erwartete Bestandsentwicklung durch konvex fallende Funktionen gekennzeichnet ist.

Des Weiteren liefert (ii) eine explizite Formel für die erwartete Preisentwicklung. Die auf Simulationen beruhenden Illustrationen, vgl. Abb. 4, Abschnitt 5, können nun auch analytisch untersucht werden. Die erwarteten optimalen Werberaten ergeben sich natürlich analog. Die Formeln (i)-(iii) können darüber hinaus verwendet werden, um spezifische Anwendungsmodelle zu kalibrieren. Es sei auch darauf hingewiesen, dass sich mit Hilfe der expliziten Formel für die erwarteten kumulierten Werbeausgaben natürlich auch die Erwartung der Umsätze $U_t^{(h)}$, vgl. (iv), via $E(U_t^{(h)}) = V_N^{(h)}(t) + E(W_t^{(h)})$ berechnen lässt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts untersuchen wir die Lösung des verallgemeinerten Modells für kleine bzw. verschwindende Verkaufseinheiten h . Wir beobachten, dass die Wertefunktion des risikoneutralen stochastischen Modells für $h \rightarrow 0$ gegen eine nichttriviale Grenzfunktion konvergiert. Diese Konvergenzaussage halten wir im nachfolgenden Theorem fest.

Theorem 6.1. Für $h \rightarrow 0$ konvergiert die Wertefunktion $V_n^{(h)}(t)$ gegen die Lösungsfunktion $V^{\text{det}}(t, n)$, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq n \leq N$, $c(t) \geq -v/\varepsilon$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} V_n^{(h)}(t) = V^{\text{det}}(t, n) := \begin{cases} B(t)/d & , n \geq B(t) \\ n/d \cdot \ln(e \cdot B(t)/n) & , \text{sonst} \end{cases} \quad (6.3)$$

Beweis. Siehe Anhang.

Überraschender Weise konvergiert die Wertefunktion des verallgemeinerten stochastischen Modells gegen eine zweiteilige Grenzfunktion. Ein Vergleich mit der Lösung des deterministischen Modells mit exponentieller Nachfrage, vgl. Theorem 2.1, Kapitel 5, zeigt, dass obige Grenzfunktion (6.3) und die Wertefunktion des deterministischen Modells übereinstimmen; die Lösung des stochastischen Modells also gegen die des deterministischen konvergiert.

Um dieses Ergebnis numerisch zu stützen, enthält Tabelle 3 neben dem optimalen Gewinn im deterministischen Modell, vgl. Eintrag $h=“(0)”$, die entsprechenden optimalen erwarteten Gewinne des stochastischen Modells für verschiedene Wert h . Beachte, dass der Fall $h=N$ eine Art Extremfall darstellt, in dem das gesamte Inventar auf einmal verkauft wird. Bei einem Nachfragepotential $B(0)=3.66$ betrachten wir mit $N=2$ und $N=4$ einen „Unter“- und einen „Überbestandsfall“ des deterministischen Modells, vgl. Kapitel 5.

	Unterbestand ($N=2$)		Überbestand ($N=4$)	
h	$V_N^{(h)}(0)$	$\frac{V_N^{(h)}(0)}{V^{\det}(0, N)}$	$V_N^{(h)}(0)$	$\frac{V_N^{(h)}(0)}{V^{\det}(0, N)}$
(0)	1.6052	1	1.8316	1
0.01	1.5912	0.9913	1.8314	0.9999
0.02	1.5807	0.9848	1.8305	0.9994
0.05	1.5550	0.9687	1.8261	0.9970
0.10	1.5207	0.9474	1.8168	0.9919
0.25	1.4433	0.8992	1.7865	0.9754
0.5	1.3492	0.8406	1.7372	0.9485
1.0	1.2156	0.7573	1.6492	0.9004
2.0	1.0408	0.6484	1.5060	0.8223

Tabelle 3. Resultate für verschiedene h ($T=1$, $a=20$, $\varepsilon=v=k=c=1$, $\delta=0.5$, $\gamma=0$) mit $B(0)=3.66$ und $N=2$ bzw. $N=4$ d.h. Unter- und Überbestand

Die Zahlen bestätigen, dass die Lösung des stochastischen Modells für $h \rightarrow 0$ von unten gegen die Lösung des deterministischen Modells konvergiert. Für alle Bestände n , welche den kritischen Wert $B(t)$ überschreiten ist im deterministischen Modell $V^{\det}(t, n) = B(t) / d$ konstant. Dieser Wert ergibt sich im stochastischen Modell nur für unendlich viele Artikel, d.h. ohne Bestandsrestriktion: mit Konvergenz der Exponentialreihe ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n^{(h)}(t) = \frac{v \cdot (1 - \delta)}{\varepsilon} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln K_n^{(h)}(t)) = \frac{v \cdot (1 - \delta)}{\varepsilon} \cdot B(t).$$

Eine graphische Verifikation der obigen Konvergenzaussage liefert Abb. 5. Während die durchgezogene Kurve die optimale Lösung des deterministischen Modells als Funktion des Anfangsbestandes N darstellt, deuten die Punkte die Lösung des stochastischen Modells für verschiedene N und h an. Die großen orangenen Punkte gleicher Größe illustrieren den Fall $h=1$; die kleineren Punkte gleicher Größe korrespondieren mit kleineren h -Werten. Es ist wieder zu beobachten, dass sich die Lösung des stochastischen Modells für kleine h der deterministischen Modelllösung annähert, welche dabei eine obere Schranke beschreibt.

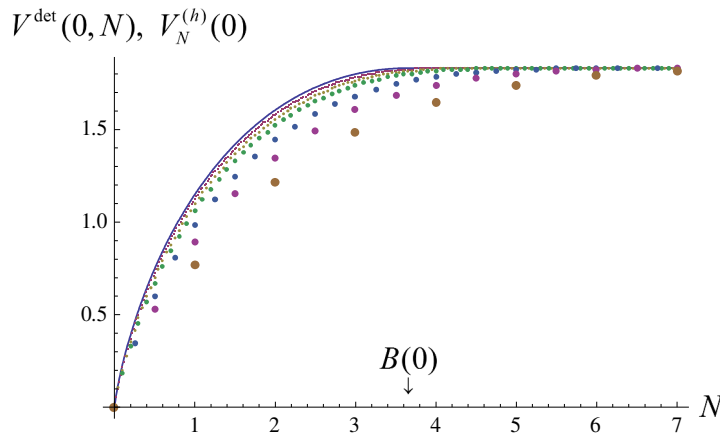


Abbildung 5. Deterministische u. stochastische Modelllösung für verschiedene N und $h=0.02, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1$. ($T=1, a=20, \varepsilon=v=k=c=1, \delta=0.5, B(0)=3.66$)

7 Zusammenfassung

Wir fassen unsere Ergebnisse im Folgenden zusammen. Wir haben das stochastische dynamische Preis-Werbemodell von MacDonald, Rasmussen (2009) um inhomogene Ankunftsrate und zeitabhängige Stückkosten erweitert. Für das durch exponentielle Preis- und isoelastische Werbewirkung charakterisierte Modell wurden risikoneutrale und risikoaverse Zielkriterien betrachtet.

Auf Basis der Lösung der mit der HJB-Gleichung assoziierten Differenz-Differentialgleichung haben wir explizite Formeln für die Wertfunktion, d.h. das Sicherheitsäquivalent, und die optimalen Kontrollen in feedback Form bestimmt. Darüber hinaus konnten die mit optimalen Politiken verbundenen zu erwartenden Verkaufsergebnisse numerisch und analytisch ausgewertet werden. Neben der effizienten Erstellung von Simulationen wurden Formeln für die erwarteten Gewinne, Umsätze und Werbeausgaben ermittelt.

Des Weiteren wurde untersucht wie sich der Grad der Risikoaversion auf die Verkaufsergebnisse, insbesondere die Gewinnverteilung, auswirkt. Auf Basis der Berechnung der bedingten Verteilung der Verkaufszeitpunkte sowie der Zustandswahrscheinlichkeiten konnte auch die Entwicklung der Bestände und die erwartete Evolution der Angebotspreise analysiert werden. Dabei stellt sich heraus, dass es sich i.A. nicht lohnt auf fallende Preise zu spekulieren.

Wir zeigen außerdem, dass zum einen das stochastische Modell für verschwindende Risikoaversion, d.h. $\gamma \rightarrow 0$, gegen das risikoneutrale Modell konvergiert; zum anderen weisen wir nach, dass die Lösung des letzteren Modells für kleine Verkaufseinheiten, d.h. $h \rightarrow 0$, gegen die deterministische Modelllösung, siehe Kapitel 5, konvergiert.

Literatur

- Bagwell, K. (2007). *The Economic Analysis of Advertising*. Handbook of Industrial Organization, Elsevier.
- Barz, C., K.-H. Waldmann (2007). *Risk-Sensitive Capacity Control in Revenue Management*. Mathematical Methods of Operations Research 65 (3), 565-579.
- Bass, F. M. (1969). *A New Product Growth for Model Consumer Durables*. Management Science 15 (5), 215-227.
- Bäuerle, N., U. Rieder (2013). *More Risk-Sensitive Markov Decision Processes*. To appear in Mathematics of Operations Research.
- Berman, O., M. Hu, Z. Pang (2013). *Up then Down: The Bid-Price Trends in Revenue Management*. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2232171>.
- Bitran, G., R. Caldentey (2003). *An Overview of Pricing Models for Revenue Management*. Manufacturing & Service Operations Management 5 (3), 203-229.
- Brémaud, P. (1980). *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. Springer, New York.
- Chen, X., M. Sim, D. Simchi-Levi, P. Sun (2007). *Risk Aversion in Inventory Management*. Options Research 55, 828-842.
- Elmaghraby, W., P. Keskinocak (2003). *Dynamic Pricing in the Presence of Inventory Considerations: Research Overview, Current Practices, and Future Directions*. Management Science 49 (10), 1287-1309.
- Ethier, S. N., T. G. Kurtz (1986). *Markov Processes: Characterization and Convergence*. Wiley & Sons.
- Feichtinger, G., R. F. Hartl, S. P. Sethi (1994). *Dynamic Optimal Control Models in Advertising: Recent Developments*. Management Science 40 (2), 195-226.
- Feng, Y., B. Xiao (2008). *A Risk-Sensitive Model for Managing Perishable Products*. Operations Research 56 (5), 1305-1311.
- Gallego, G., G. van Ryzin (1994). *Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons*. Management Science 40, 999-1020.
- Gönsch, J., R. Klein, C. Steinhardt (2009). *Dynamic Pricing – State-of-the-Art*. Zeitschrift für Betriebswirtschaft 79, special issue 3, 1-40.
- Helmes, K., R. Schlosser (2013). *Dynamic Advertising and Pricing with Constant Demand Elasticities*. Journal of Economic Dynamics and Control 37, 2814-2832.
- Helmes, K., R. Schlosser, M. Weber (2013). *Dynamic Advertising and Pricing in a Class of General New-Product Adoption Models*. European Journal of Operational Research 229, 433-443.
- Huang, J., M. Leng, L. Liang (2012). *Recent Developments in Dynamic Advertising Research*. European Journal of Operations Research 220 (3), 591-609.

- Koenig, M., J. Meissner (2009). *Risk Minimizing Strategies for Revenue Management with Target Values*. Working Papers / Lancaster University Management School; 2009/040.
- Krishnamoorthy, A., A. Prasad, S. P. Sethi (2010). *Optimal Pricing and Advertising in a Durable-Good Duopoly*. European Journal of Operational Research 200, 486-497.
- Levin, Y., J. McGill, M. Nediak (2008). *Risk in Revenue Management and Dynamic Pricing*. Operations Research 56 (2), 326-343.
- Li, M. Z. F., W. Zhuang (2009). *Risk-Sensitive Dynamic Pricing for a Single Perishable Product*. Operations Research Letters. doi: 10.1016/j.orl.2009.05.005.
- Lim, A. E. B., J. G. Shanthikumar (2007). *Relative Entropy, Exponential Utility and Robust Dynamic Pricing*. Options Research 55, 198-214.
- MacDonald, L., H. Rasmussen (2009). *Revenue Management with Dynamic Pricing and Advertising*. Journal of Revenue and Pricing Management 9, 126-136.
- McAfee, R. P., V. te Velde (2006). *Dynamic Pricing in the Airline Industry*. Handbook on Economics and Information Systems. Elsevier, Amsterdam, 527-570.
- McAfee, R. P., V. te Velde (2008). *Dynamic Pricing with Constant Demand Elasticity*. Production and Operations Management 17 (4), 432-438.
- Nerlove, M., K. J. Arrow (1962). *Optimal Advertising Policy under Dynamic Conditions*. Economica 29 (114), 129-142.
- Øksendal, B., A. Sulem (2005). *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Second Edition. Springer.
- Shen, Z. M., X. Su (2007). *Customer Behavior Modeling in Revenue Management and Auctions: A Review and New Research Opportunities*. Production Operations Management 16 (6), 713-728.
- Talluri, K. T., G. van Ryzin (2004). *The Theory and Practice of Revenue Management*. Kluwer Academic Publishers.
- Sethi, S. P., A. Prasad, X. He. (2008). *Optimal Advertising and Pricing in a New-Product Adoption Model*. Journal of Optimization Theory and Applications 139 (2), 351-360.
- Xu, X., W. J. Hopp (2009). *Price Trends in a Dynamic Pricing Model with Heterogeneous Customers: A Martingale Perspective*. Operations Research 57 (5), 1298-1302.

Anhang

Abschnitt 2

Beschreibung der Dynamik des Prozesses

Der Zustand unseres Prozesses ist gegeben durch die Zeit t (kontinuierlich), $t \in [0, T]$, den zufälligen Bestand X_t (diskret), $X_t \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, und den zufälligen kumulierten Gewinn R_t (kontinuierlich), $R_t \in \mathbb{R}$. Diese drei Zustandskomponenten können Werte (t, n, r) in $[0, T] \times \{0, 1, 2, \dots, N\} \times (-\infty, \infty)$ annehmen. Wir betrachten Markovsche Rückkopplungssteuerungen $p_{n,r}(t)$ und $w_{n,r}(t)$ für Preis und Werbung. Für derartige gegebene Politiken $(p_{n,r}(t), w_{n,r}(t))$ ist die Sprungintensität im Zustand (t, n, r) gegeben durch $\lambda_{n,r}(t) := \lambda(t, p_{n,r}(t), w_{n,r}(t))$. Die Dynamik des dreidimensionalen gesteuerten Markovschen Prozesses ist beschrieben durch den Erzeuger A , der angewandt auf Funktion $F(t, n, r) := g(t) \cdot f(n) \cdot h(r)$, für $f(n)$, $g(t)$, $h(r)$ differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger, die Form hat:

$$AF(t, n, r) = \dot{g}(t) \cdot f(n) \cdot h(r) + g(t) \cdot \lambda_{n,r}(t) \cdot \left(f(n-1) \cdot h(r + v \cdot p_{n,r}(t) - c(t)) - f(n) \cdot h(r) \right) + g(t) \cdot f(n) \cdot \left(-k(t) \cdot w_{n,r}(t) \right) \cdot h'(r),$$

vgl. Ethier, Kurtz (1986), Kap. 4 und speziell Kap. 8; siehe auch Øksendal, Sulem (2005), Kap. 1. Die Bestandsentwicklung für X_t folgt dem Sprungprozess der Verkäufe, deren Wahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(\Delta)}(t) := P[X_{t+\Delta} = j | X_t = i]$, $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $\Delta > 0$, zum Zeitpunkt t durch die Kolmogorovsche Rückwärtsgleichung und durch die Ratenmatrix, $0 \leq t < T$,

$$Q(t) := (q_{ij}(t))_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ \lambda_{1,R_t}(t) & -\lambda_{1,R_t}(t) & 0 & & & 0 \\ 0 & \lambda_{2,R_t}(t) & -\lambda_{2,R_t}(t) & & & \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ & 0 & & \lambda_{N-1,R_t}(t) & -\lambda_{N-1,R_t}(t) & 0 \\ & & & 0 & \lambda_{N,R_t}(t) & -\lambda_{N,R_t}(t) \end{pmatrix}$$

bestimmt werden. Es gilt $Q(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (P^{(\Delta)}(t) - I_{N+1}) / \Delta$, wobei $P^{(\Delta)}(t) := (p_{ij}^{(\Delta)}(t))_{ij}$ die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten beschreibt. Sind alle $p_{n,r}(t), w_{n,r}(t)$ unabhängig von den Gewinnen r , so gilt $P^{(\Delta)}(t) = \exp\left(\int_t^{t+\Delta} Q(s) ds\right)$.

Durch die an die verkaufsbedingten Bestandssprünge gekoppelten Umsätze und die kontinuierlich anfallenden Werbeausgaben ist der Gewinnprozess ein spezieller Sprung-Diffusionsprozess, wobei die Kostenrate $k(t) \cdot w_{X_t, R_t}(t)$ als negativer (stückweise stetiger) Driftterm eingeht und der Diffusionskoeffizient identisch Null ist, vgl. Øksendal, Sulem (2005), Kap. 1. Es ergibt sich somit

$$R_t = \int_0^{t \wedge \tau} v \cdot p_{X_{s-}, R_{s-}}(s) - c(s) \, dX_s - \int_0^{t \wedge \tau} k(s) \cdot w_{X_{s-}, R_{s-}}(s) \, ds.$$

Idee der Herleitung der CARA-Version der HJB-Gleichung (2.5)

Wir betrachten eine zeitdiskretisierte Version unseres Modells mit Zeitintervallen der Länge $h > 0$, wobei T ein Vielfaches von h ist. Die zeitdiskrete Version der Nutzenwertfunktion bezeichnen wir mit $W_{n,r}^{(h)}(t)$, $t = 0, h, 2h, \dots, T$. Wir nehmen an, dass die Preis-Werbeaktionen zu Beginn einer Periode für dessen gesamte Länge bestimmt werden. Für „kleine“ h kann die Wahrscheinlichkeit einen Artikel zu verkaufen approximativ als $h \cdot \lambda$ angenommen werden; mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - h \cdot \lambda$ findet kein Verkauf statt. Entsprechend der in Abschnitt 2 beschriebenen Zustandsübergänge ergibt sich in der Formulierung ohne Auszahlungsfunktional und mit Gewinnakkumulation im Zustand ausgehend von den Endbedingungen $W_{n,r}^{(h)}(T) = -e^{-\gamma r}$, $1 \leq n \leq N$, $r \in \mathbb{R}$, und $W_{0,r}^{(h)}(t) = -1$, $t = 0, h, \dots, T - h$, $r \in \mathbb{R}$, die folgende Beziehung für die zeitdiskrete Version der Wertfunktion $W_{n,r}^{(h)}(t)$, $t = 0, h, \dots, T - h$, $1 \leq n \leq N$ und $r \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} W_{n,r}^{(h)}(t) &= \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ (1 - h \cdot \lambda(t, p, w)) \cdot W_{n, r-k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h) + h \cdot \lambda(t, p, w) \cdot W_{n-1, r+v \cdot p - c(t) - k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h) \right\} \\ &= \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ W_{n, r-k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h) + h \cdot \lambda(t, p, w) \cdot \left(W_{n-1, r+v \cdot p - c(t) - k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h) - W_{n, r-k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten dieser Gleichung den Term $W_{n,r}^{(h)}(t+h)$ erhalten wir

$$W_{n,r}^{(h)}(t) - W_{n,r}^{(h)}(t+h) = \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ W_{n, r-k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h) - W_{n,r}^{(h)}(t+h) + h \cdot \lambda(t, p, w) \cdot \left(W_{n-1, r+v \cdot p - c(t) - k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h) - W_{n, r-k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h) \right) \right\}.$$

Dividieren wir nun durch h , so folgt die Beziehung

$$\frac{W_{n,r}^{(h)}(t) - W_{n,r}^{(h)}(t+h)}{h} = \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ \lambda(t, p, w) \cdot \left(W_{n-1, r+v \cdot p - c(t) - k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h) - W_{n, r-k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h) \right) + \frac{W_{n,r}^{(h)}(t+h)}{h} \cdot \left(\frac{W_{n, r-k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h)}{W_{n,r}^{(h)}(t+h)} - 1 \right) \right\}.$$

Der folgende Grenzübergang illustriert die Grundidee der Herleitung der Bellman Gleichung und dient als Plausibilitätsstütze. Nutzen wir $\forall t, n, r$ die Beziehung, vgl. Abschnitt 2,

$$W_{n,r}(t) := E^* \left(-e^{-\gamma R_T} \mid X_t = n, R_t = r \right) =: E_{t,n,r}^* \left(-e^{-\gamma(R_t + G_t)} \right) = e^{-\gamma r} \cdot E_{t,n,r}^* \left(-e^{-\gamma G_t} \right)$$

so ergibt sich

$$\frac{W_{n, r-k(t) \cdot h \cdot w}^{(h)}(t+h)}{W_{n,r}^{(h)}(t+h) \cdot h} - \frac{1}{h} = \frac{e^{-\gamma(r-k(t) \cdot h \cdot w)} \cdot E_{t+h, n, r-k(t) \cdot h \cdot w}^* \left(-e^{-\gamma G_{t+h}} \right)}{h \cdot e^{-\gamma r} \cdot E_{t+h, n, r}^* \left(-e^{-\gamma G_{t+h}} \right)} - \frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\gamma k(t) \cdot h \cdot w} - 1}{h} = \gamma \cdot k(t) \cdot w$$

und somit

$$\dot{W}_{n,r}(t) = \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ \lambda(t, p, w) \cdot (W_{n-1, r+v \cdot p - c(t)}(t) - W_{n,r}(t)) + W_{n,r}(t) \cdot \gamma \cdot k(t) \cdot w \right\}.$$

Mit Division durch $W_{n,r}(t) \neq 0$ erhalten wir schließlich die Gleichung (2.5):

$$-\frac{\dot{W}_{n,r}(t)}{W_{n,r}(t)} + \sup_{p \geq 0, w \geq 0} \left\{ \lambda(t, p, w) \cdot \left(1 - \frac{W_{n-1, r+v \cdot p - c(t)}(t)}{W_{n,r}(t)} \right) - \gamma \cdot k(t) \cdot w \right\} = 0.$$

Die exakte Herleitung der HJB-Gleichung für das zeitstetige Modell verlangt (aufwendige) funktionalanalytische Betrachtungen.

Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

Durch Ableitung der Hilfsfunktion $L(t, p, w) := \gamma^{-1} \cdot \lambda(t, p, w) \cdot (1 - e^{-\gamma \cdot (v \cdot p - c(t) - \Delta \tilde{V}_n(t))}) - k(t) \cdot w$, vgl. (3.1), nach dem Preis p bzw. der Werberate w erhalten wir die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung, siehe Abschnitt 3. Im Hinblick auf hinreichende Optimalitätsbedingungen bestimmen wir die zweiten Ableitungen von L bzgl. p und w . Mit den Bedingungen erster

Ordnung, vgl. $p_n^*(t) = \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{v \cdot \gamma} \cdot \ln \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} + \frac{1}{v} \cdot \Delta \tilde{V}_n(t)$ und

$w_n^*(t) = \left(\frac{v \cdot \delta \cdot a(t)}{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)} \cdot e^{-\varepsilon \cdot p_n^*(t)} \right)^{1/(1-\delta)}$, siehe Abschnitt 3, folgt, dass im Optimalpunkt

$v \cdot p - c(t) - \Delta \tilde{V}_n(t) > 0$ gilt. Damit ergibt sich

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} L(t, p, w) = 0 + \underbrace{\lambda}_{>0} \cdot \left(\underbrace{-\gamma^2 \cdot v^2 \cdot e^{-\gamma \cdot v \cdot p}}_{<0} + \underbrace{\gamma e^{-\gamma \cdot (v \cdot p - c(t) - \Delta \tilde{V}_n(t))}}_{>0} \cdot \underbrace{\lambda'_p / \lambda}_{<0} + \underbrace{(1 - e^{-\gamma \cdot (v \cdot p - c(t) - \Delta \tilde{V}_n(t))})}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\lambda'_p}{\lambda} \right)}_{=0} \right) < 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial w^2} L(t, p, w) = \frac{1}{\gamma} \cdot \underbrace{\lambda''_{w,w}(t, p, w)}_{<0} \cdot \underbrace{(1 - e^{-\gamma \cdot (v \cdot p - c(t) - \Delta \tilde{V}_n(t))})}_{>0} < 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p \partial w} L(t, p, w) = \underbrace{\lambda''_{p,w}}_{\lambda'_p \cdot \lambda'_w / \lambda} \cdot \underbrace{1 / \gamma \cdot (1 - e^{-\gamma \cdot (v \cdot p - c(t) - \Delta \tilde{V}_n(t))})}_{\gamma \cdot v \cdot e^{-\gamma \cdot v \cdot p} \cdot \frac{\lambda}{-\lambda'_p} = \lambda'_w^{-1}} + \underbrace{\lambda'_w \cdot \gamma \cdot v \cdot e^{-\gamma \cdot v \cdot p}}_{\lambda'_w^{-1} \cdot \frac{-\lambda'_p}{\lambda}} = \lambda'_p / \lambda - \lambda'_p / \lambda = 0.$$

Somit ergibt sich, dass die Hessematrix negativ definit im (einzigen) Optimalpunkt ist. \square

Abschnitt 3

Beweis von Proposition 3.1

In unserem Spezialfall mit exponentieller Nachfrage berechnen wir die CARA-Version der dynamischen Dorfman-Steiner Identität wie folgt. Mit der Definition der Verkaufsrate folgt für das Verhältnis von optimaler Werberate und optimaler Verkaufsrate

$$\frac{w_n^*(t)}{\lambda(t, p_n^*(t), w_n^*(t))} = \frac{w_n^*(t)}{a(t) \cdot w_n^*(t)^\delta \cdot e^{-\varepsilon \cdot p_n^*(t)}} = \frac{w_n^*(t)^{1-\delta}}{a(t) \cdot e^{-\varepsilon \cdot p_n^*(t)}}.$$

Mit der Optimalitätsbedingung für Werbung $w_n^*(t) = \left(\frac{v \cdot \delta \cdot a(t)}{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)} \cdot e^{-\varepsilon \cdot p_n^*(t)} \right)^{1/(1-\delta)}$ ergibt sich

$$\frac{w_n^*(t)^{1-\delta}}{a(t) \cdot e^{-\varepsilon \cdot p_n^*(t)}} = \frac{\frac{v \cdot \delta \cdot a(t)}{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)} \cdot e^{-\varepsilon \cdot p_n^*(t)}}{a(t) \cdot e^{-\varepsilon \cdot p_n^*(t)}} \equiv \frac{v \cdot \delta}{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)}. \quad \square$$

Beweis von Theorem 3.1

Wir setzen die Lösung der Wertefunktion $\tilde{V}_n(t) = 1/d \cdot \ln K_n(t)$ in die Optimalitätsbedingung für den Preis, d.h. $p_n^*(t) = \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{v \cdot \gamma} \cdot \ln \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} + \frac{1}{v} \cdot \Delta \tilde{V}_n(t)$, ein und erhalten

$$\begin{aligned} p_n^*(t) &= \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{v \cdot \gamma} \cdot \ln \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} + \frac{1}{v} \cdot (1/d \cdot \ln K_n(t) - 1/d \cdot \ln K_{n-1}(t)) \\ &= \frac{c(t)}{v} + \frac{1}{v \cdot \gamma} \cdot \ln \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} + \frac{1}{v \cdot d} \cdot \ln \left(\frac{K_n(t)}{K_{n-1}(t)} \right), \quad \text{wobei } d := \varepsilon / (v \cdot (1 - \delta)) \\ &= \frac{c(t)}{v} + \ln \left(\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{v \cdot \gamma}} + \frac{1 - \delta}{\varepsilon} \cdot \ln \left(\frac{K_n(t)}{K_{n-1}(t)} \right). \end{aligned}$$

Die explizite Darstellung der optimalen Werberaten $w_n^*(t)$ gewinnen wir, indem wir die obige Beziehung für optimale Preise in die Optimalitätsbedingung für optimale Werberaten (siehe Beweis von Proposition 3.1) einsetzen:

$$\begin{aligned} w_n^*(t) &= \left(\frac{v \cdot \delta \cdot a(t)}{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)} \cdot e^{-\varepsilon \cdot p_n^*(t)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \\ &= \left(\frac{v \cdot \delta \cdot a(t)}{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot c(t)}{v \cdot (1-\delta)} + \ln \left(\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \right)^{\frac{-\varepsilon}{v \cdot \gamma (1-\delta)}} - \frac{1-\delta}{1-\delta} \cdot \ln \left(\frac{K_n(t)}{K_{n-1}(t)} \right)} \\ &= \left(\frac{v \cdot \delta \cdot a(t)}{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot c(t)}{v \cdot (1-\delta)}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + v \cdot \gamma} \right)^{\frac{\varepsilon}{v \cdot \gamma (1-\delta)}} \cdot \frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)} \\ &= \frac{\delta \cdot v}{\varepsilon \cdot k(t)} \cdot \tilde{\beta}(t) \cdot \left(\frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)} \right). \end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt, da $\tilde{\beta}(t) := \frac{k(t) \cdot \varepsilon}{v \cdot \delta} \cdot \left(\frac{v \cdot \delta \cdot a(t)}{k(t) \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + v \cdot \gamma} \right)^{\frac{\varepsilon}{v \cdot \gamma (1-\delta)}} \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot c(t)}{v \cdot (1-\delta)}}$ ist.

Die optimale Verkaufsrate $\lambda_n^*(t)$, vgl. Theorem 3.1, berechnet sich mit $p_n^*(t)$ und $w_n^*(t)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda(t, p^*, w^*) &= a(t) \cdot w^\delta \cdot e^{-\varepsilon \cdot p} = a(t) \cdot \left(\tilde{\beta}(t) \cdot \frac{\delta \cdot v}{k(t) \cdot \varepsilon} \cdot \frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)} \right)^\delta \cdot e^{-\varepsilon \cdot \left(\frac{c(t)}{v} + \ln \left(\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \right)^{1/(v \cdot \gamma)} + \frac{1-\delta}{\varepsilon} \cdot \ln \left(\frac{K_n(t)}{K_{n-1}(t)} \right) \right)} \\
&= a(t) \cdot \left(\tilde{\beta}(t) \cdot \frac{\delta \cdot v}{k(t) \cdot \varepsilon} \right)^\delta \cdot \left(\frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)} \right)^\delta \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot c(t)}{v}} \cdot \left(\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \right)^{\frac{-\varepsilon}{v \cdot \gamma}} \cdot \left(\frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)} \right)^{1-\delta} \\
&= a(t) \cdot \left(\tilde{\beta}(t) \cdot \frac{\delta \cdot v}{k(t) \cdot \varepsilon} \right)^\delta \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot c(t)}{v}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + v \cdot \gamma} \right)^{\frac{\varepsilon}{v \cdot \gamma}} \cdot \frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)} \\
&= a(t) \cdot \tilde{\beta}(t)^\delta \cdot \left(\frac{\delta \cdot v}{k(t) \cdot \varepsilon} \right)^\delta \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot c(t)}{v}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + v \cdot \gamma} \right)^{\frac{\varepsilon}{v \cdot \gamma}} \cdot \frac{-\tilde{\beta}(t)^{-1} \cdot \dot{K}_n(t)}{K_n(t)} \\
&= \underbrace{- \left(\left(\frac{\varepsilon}{v \cdot \delta} \right)^{\delta-1} \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot c(t)}{v}} \cdot \frac{k(t)^\delta}{v \cdot \delta \cdot a(t)} \cdot \left(\frac{\varepsilon^\varepsilon}{(\varepsilon + v \cdot \gamma)^{\varepsilon + v \cdot \gamma}} \right)^{-1/(v \cdot \gamma)} \right)}_{\tilde{\beta}(t)^{\delta-1}} \cdot a(t) \cdot \left(\frac{\delta \cdot v}{k(t) \cdot \varepsilon} \right)^\delta \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot c(t)}{v}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + v \cdot \gamma} \right)^{\frac{\varepsilon}{v \cdot \gamma}} \cdot \frac{\dot{K}_n(t)}{K_n(t)} \\
&= -\varepsilon^{\delta-1} \cdot \left(\frac{\varepsilon^\varepsilon}{(\varepsilon + v \cdot \gamma)^{\varepsilon + v \cdot \gamma}} \right)^{\frac{-1}{v \cdot \gamma}} \cdot \varepsilon^{-\delta} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + v \cdot \gamma} \right)^{\frac{\varepsilon}{v \cdot \gamma}} \cdot \frac{\dot{K}_n(t)}{K_n(t)} \\
&= -\varepsilon^{-1} \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{v \cdot \gamma}} \cdot (\varepsilon + v \cdot \gamma)^{\frac{-\varepsilon}{v \cdot \gamma}} \cdot \frac{\dot{K}_n(t)}{K_n(t)} = -\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{\dot{K}_n(t)}{K_n(t)}. \quad \square
\end{aligned}$$

Ein Nachweis, dass die angegebene Wertefunktion $\tilde{V}_n(t) = v \cdot (1 - \delta) / \varepsilon \cdot \ln K_n(t)$ auch die Gleichung (3.3) löst, wird in den Beweisen zum Abschnitt 6 geliefert. Beachte, dass mit der Lösung stets $v \cdot p_n^*(t) - c(t) - \Delta \tilde{V}_n(t) = \gamma^{-1} \cdot \ln(1 + v \cdot \gamma / \varepsilon) \geq 0$ gilt, vgl. hinreichenden Optimalitätsbedingungen S. 181, und die Bedingung $c(t) \geq -\gamma^{-1} \cdot \ln(1 + v \cdot \gamma / \varepsilon)$ die Beziehung $p_n^*(t) \geq 0$ und $w_n^*(t) \geq 0$ impliziert. Damit sind die angegebenen optimalen Kontrollen auch zulässig.

Abschnitt 4

Beweis von Theorem 4.1

Wir wollen beweisen, dass die Zustandswahrscheinlichkeiten q durch die Rekursion, $0 \leq t \leq T$,

$$q_{n-1}(t) = K_{n-1}(t)^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon}} \cdot \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \int_0^t \frac{\tilde{\beta}(s)}{K_n(s) \cdot K_{n-1}(s)^{v \cdot \gamma / \varepsilon}} \cdot q_n(s) \, ds, \quad 1 \leq n \leq N.$$

ausgehend von den Wahrscheinlichkeiten $q_N(t) := (K_N(t) / K_N(0))^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon}}$ für den Anfangsbestand N gegeben sind.

Schritt 1:

Für die Zustandswahrscheinlichkeiten des Anfangsbestandes N gilt die folgende Dynamik:

$$\dot{q}_N(t) = \lambda_N^*(t) \cdot q_N(t) = \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{-\dot{K}_N(t)}{K_N(t)} \cdot q_N(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\dot{q}_N(t)}{q_N(t)} = \frac{\varepsilon + \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{\dot{K}_N(t)}{K_N(t)}.$$

Aus letzterer linearer DGL mit der Randbedingung $q_N(0)=1$ folgt per Integration beider Seiten

$$\begin{aligned} -\int_0^t \frac{\dot{q}_N(s)}{q_N(s)} ds &= \int_0^t \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{\dot{K}_N(s)}{K_N(s)} ds \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{\ln q_N(0)}_{=1} - \ln q_N(t) &= \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot (\ln K_N(t) - \ln K_N(0)), \end{aligned}$$

und wir erhalten schließlich
$$q_N(t) = \left(\frac{K_N(t)}{K_N(0)} \right)^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon}}.$$

Schritt 2:

Mit der optimalen Verkaufsrate $\lambda_n^*(t) = \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{-\dot{K}_{n-1}(t)}{K_n(t)}$ gilt für alle $1 \leq n \leq N$ die Dynamik

$$\begin{aligned} \dot{q}_{n-1}(t) &= \lambda_n^*(t) \cdot q_n(t) - \lambda_{n-1}^*(t) \cdot q_{n-1}(t) \\ &= -\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{\dot{K}_n(t)}{K_n(t)} \cdot q_n(t) + \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{\dot{K}_{n-1}(t)}{K_{n-1}(t)} \cdot q_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Die lineare DGL für $q_{n-1}(t)$ mit der natürlichen Randbedingung $q_{n-1}(0)=0$, $n \leq N$, hat die Lösung

$$q_{n-1}(t) = e^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \ln K_{n-1}(t)} \cdot \int_0^t \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{-\dot{K}_n(s)}{K_n(s) \cdot e^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \ln K_{n-1}(s)}} \cdot q_n(s) ds, \quad (A1)$$

denn für alle $n=1, \dots, N$ ist die folgende Probe erfüllt: Die Zeitableitung der Lösung (A1) liefert

$$\begin{aligned} \dot{q}_{n-1}(t) &= \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{\dot{K}_{n-1}(t)}{K_{n-1}(t)} \cdot e^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \ln K_{n-1}(t)} \cdot \underbrace{\int_0^t \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{-\dot{K}_n(s)}{K_n(s) \cdot e^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \ln K_{n-1}(s)}} \cdot q_n(s) ds}_{q_{n-1}(t)} \\ &\quad + e^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \ln K_{n-1}(t)} \cdot \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{-\dot{K}_n(t)}{K_n(t) \cdot e^{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \ln K_{n-1}(t)}} \cdot q_n(t) \\ &= \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{\dot{K}_{n-1}(t)}{K_{n-1}(t)} \cdot q_{n-1}(t) - \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \frac{\dot{K}_n(t)}{K_n(t)} \cdot q_n(t) ds, \end{aligned}$$

was genau der oben aufgeführten zu erfüllenden Dynamik entspricht. Für $t=0$ verschwindet der Integralausdruck der Lösungsfunktion, und die Randbedingung ist erfüllt, da $K_{n-1}(t)^{(\varepsilon+v\cdot\gamma)/\varepsilon} < \infty$ stets beschränkt ist. \square

Beweis von Proposition 4.1

Wir ermitteln die (bedingte) Verteilung der Verkaufszeitpunkte wie folgt. Sei τ_j der zufällige Zeitpunkt an dem der j -te Artikel verkauft wird, $1 \leq j \leq N$; unmittelbar vor τ_j beträgt der Restbestand also $N-j+1$. Sei $\tau_0 = 0$ der Beginn des Verkaufsintervalls. Die Wahrscheinlichkeit, dass der j -te Artikel vor dem Zeitpunkt t verkauft wird, bedingt an den vorherigen Verkaufszeitpunkt τ_{j-1} des $(j-1)$ -ten Artikel, ist gemäß der optimal gesteuerten inhomogenen Sprungintensität für alle $1 \leq j \leq N$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
 P(\tau_j \leq t | \tau_{j-1}) &= \int_{\tau_{j-1}}^t e^{-\int_{\tau_{j-1}}^s \lambda_{N-j+1}^*(r) dr} \lambda_{N-j+1}^*(s) ds \\
 &= -e^{-\int_{\tau_{j-1}}^s \lambda(r, p_{N-j+1}^*(r), w_{N-j+1}^*(r)) dr} \Big|_{s=\tau_{j-1}}^t = 1 - e^{-\int_{\tau_{j-1}}^t \lambda(s, p_{N-j+1}^*(s), w_{N-j+1}^*(s)) ds} \\
 &= 1 - e^{-\int_{\tau_{j-1}}^t \frac{\varepsilon+v\cdot\gamma}{\varepsilon} \frac{K'_{N-j+1}(s)}{K_{N-j+1}(s)} ds} = 1 - e^{-\frac{\varepsilon+v\cdot\gamma}{\varepsilon} \ln(K_{N-j+1}(s)) \Big|_{\tau_{j-1}}^t}, \text{ da } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| \\
 &= 1 - e^{-\frac{\varepsilon+v\cdot\gamma}{\varepsilon} \ln \frac{K_{N-j+1}(t)}{K_{N-j+1}(\tau_{j-1})}} = 1 - \left(\frac{K_{N-j+1}(t)}{K_{N-j+1}(\tau_{j-1})} \right)^{\frac{\varepsilon+v\cdot\gamma}{\varepsilon}}. \tag{A2}
 \end{aligned}$$

Wir wollen nun die an τ_{j-1} bedingte Verteilung des Ausdrucks, vgl. (A2),

$$\left(K_{N-j+1}(\tau_j) / K_{N-j+1}(\tau_{j-1}) \right)^{\frac{\varepsilon+v\cdot\gamma}{\varepsilon}} \in \left[K_{N-j+1}(\tau_{j-1})^{-(1+v\cdot\gamma/\varepsilon)}, 1 \right]$$

bestimmen. Da $K_n(t) := \sum_{i=0}^n \left(\int_t^T \tilde{\beta}(s) ds \right)^i \cdot \frac{1}{i!}$ für alle $n > 0$ streng monoton in t fällt, existiert für alle festen $n > 0$ jeweils eine streng monoton fallende Umkehrfunktion $K_n^{-1}(\cdot)$, welche $K_n^{-1}(K_n(t)) = t$ erfüllt. Für alle Zahlen q , $0 \leq K_{N-j+1}(\tau_{j-1})^{-(1+v\cdot\gamma/\varepsilon)} \leq q \leq 1$ ergibt sich damit

$$P \left(\left(\frac{K_{N-j+1}(\tau_j)}{K_{N-j+1}(\tau_{j-1})} \right)^{\frac{\varepsilon+v\cdot\gamma}{\varepsilon}} \leq q \mid \tau_{j-1} \right) = P \left(K_{N-j+1}(\tau_j) \leq K_{N-j+1}(\tau_{j-1}) \cdot q^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+v\cdot\gamma}} \mid \tau_{j-1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= P \left(K_{N-j+1}^{-1} \circ K_{N-j+1}(\tau_j) \geq K_{N-j+1}^{-1} \circ \left(K_{N-j+1}(\tau_{j-1}) \cdot q^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+v\gamma}} \right) \middle| \tau_{j-1} \right) \quad (\text{Umkehrfunktion}) \\
&= 1 - P \left(\underbrace{\tau_j \leq K_{N-j+1}^{-1} \circ \left(K_{N-j+1}(\tau_{j-1}) \cdot q^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+v\gamma}} \right)}_{\text{vgl. t in (A2)}} \middle| \tau_{j-1} \right) \quad (\text{Gegenwahrscheinlichkeit}) \\
&\stackrel{(A2)}{=} 1 - \left(1 - \left(\frac{K_{N-j+1} \left(K_{N-j+1}^{-1} \circ \left(K_{N-j+1}(\tau_{j-1}) \cdot q^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+v\gamma}} \right) \right)}{K_{\tau_{j-1}}(N-j+1)} \right)^{\frac{\varepsilon+v\gamma}{\varepsilon}} \right) = \left(\frac{K_{N-j+1}(\tau_{j-1}) \cdot q^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+v\gamma}}}{K_{N-j+1}(\tau_{j-1})} \right)^{\frac{\varepsilon+v\gamma}{\varepsilon}} = q.
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde die Beziehung (A2) genutzt. Die bedingte Verteilungsfunktion ist also linear und ähnelt einer Gleichverteilung. Genauer gesagt folgt, dass der untersuchte Ausdruck $\left(K_{N-j+1}(\tau_j) / K_{N-j+1}(\tau_{j-1}) \right)^{1+v\gamma/\varepsilon}$ bedingt an den vorherigen Verkaufszeitpunkt τ_{j-1} einer abgeschnittenen (0,1)-Gleichverteilung folgt. Wir erhalten schließlich für gegebene $\tau_{j-1} \in [0, T]$, $1 \leq j \leq N$,

$$\left(\frac{K_{N-j+1}(\tau_j)}{K_{N-j+1}(\tau_{j-1})} \right)^{\frac{\varepsilon+v\gamma}{\varepsilon}} \sim \max \left(U(0,1), K_{N-j+1}(\tau_{j-1})^{\frac{-(\varepsilon+v\gamma)}{\varepsilon}} \right).$$

Seien nun $Z_j \sim U(0,1)$, $1 \leq j \leq N$, unabhängig identisch gleichverteilte Zufallsvariablen, dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{K_{N-j+1}(\tau_j)}{K_{N-j+1}(\tau_{j-1})} \right)^{\frac{\varepsilon+v\gamma}{\varepsilon}} \sim \max \left(Z_j, K_{N-j+1}(\tau_{j-1})^{\frac{-(\varepsilon+v\gamma)}{\varepsilon}} \right) \quad \left| \wedge \frac{\varepsilon}{\varepsilon+v\gamma} > 0 \right. \\
&\Leftrightarrow \frac{K_{N-j+1}(\tau_j)}{K_{N-j+1}(\tau_{j-1})} \sim \max \left(Z_j^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+v\gamma}}, K_{N-j+1}(\tau_{j-1})^{-1} \right) \quad \left| \cdot K_{N-j+1}(\tau_{j-1}) > 0 \right. \\
&\Leftrightarrow K_{N-j+1}(\tau_j) \sim \max \left(K_{N-j+1}(\tau_{j-1}) \cdot Z_j^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+v\gamma}}, 1 \right) \quad (\text{Anwendung der Umkehrfunktion}) \\
&\Leftrightarrow \tau_j \sim K_{N-j+1}^{-1} \circ \left(\max \left(1, K_{N-j+1}(\tau_{j-1}) \cdot Z_j^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+v\gamma}} \right) \right). \quad \square
\end{aligned}$$

Beweis der Formeln zur Berechnung von simulierten Umsätzen und Werbeausgaben

Für gegebene bzw. simulierte Verkaufszeitpunkte folgt direkt aus der Definition der kumulierten Einnahmen abzüglich der Produktionskosten bis zum Zeitpunkt t die Formel

$$U_t = \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ \tau_j \leq t}} \left(v \cdot p_{N-j+1}^*(\tau_j) - c(\tau_j) \right).$$

Die kumulierten Werbeausgaben bis zum Zeitpunkt t ergeben sich aus der integrierten Werberatentrajektorie, welche durch gegebene bzw. simulierte Verkaufszeitpunkte τ_j charakterisiert ist. Dabei kann die Integration von 0 bis t der optimalen Werberaten $w_n^*(t) = \delta \cdot v / (k(t) \cdot \varepsilon) \cdot (-\dot{K}_n(t) / K_n(t))$ aus der Partition der Zeitintervalle mit gleichem Restbestand zusammengesetzt werden:

$$\begin{aligned} W_t &= \sum_{\substack{j=0, \dots, N-1 \\ \tau_j \leq t}} \int_{\tau_j}^{\min(\tau_{j+1}, t)} k(s) \cdot w_{N-j}^*(s) \, ds \\ &= \sum_{\substack{j=0, \dots, N-1 \\ \tau_j \leq t}} \int_{\tau_j}^{\min(\tau_{j+1}, t)} \frac{\delta \cdot v}{\varepsilon} \cdot \frac{-\dot{K}_{N-j}(s)}{K_{N-j}(s)} \, ds \quad , \text{ wobei } \int_{x_1}^{x_2} \frac{-f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x_1)| - \ln|f(x_2)| \\ &= \frac{\delta \cdot v}{\varepsilon} \cdot \sum_{\substack{j=0, \dots, N-1 \\ \tau_j \leq t}} \ln \frac{K_{N-j}(\tau_j)}{K_{N-j}(\min(\tau_{j+1}, t))}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Struktur der optimalen Werberaten können die beschriebenen Teilintegrale explizit angegeben werden, und wir erhalten eine einfache Summenformel für die Werbeausgaben bis t . \square

Abschnitt 5

Beweis von Theorem 5.1

Für hinreichend kleine $h > 0$ kann die Wahrscheinlichkeit für den Verkauf eines Artikel zwischen den Zeitpunkten t und $t+h$ (approximativ) mit $\lambda^*(t) \cdot h$ angenommen werden. Im Zeitpunkt t und einem Restbestand von n Artikeln betrachten wir die folgende Ungleichung für den aktuellen Preis $p_n(t) = c(t) / v + \ln(1 + v \cdot \gamma / \varepsilon) / (v \cdot \gamma) + (1 - \delta) / \varepsilon \cdot \ln(K_n(t) / K_{n-1}(t))$ und den kurzfristig erwarteten Preis in $t+h$:

$$\begin{aligned} p_n(t) &< E_{t,n} \left[p_{X(t+h)}(t+h) \right] \\ \Leftrightarrow \quad p_n(t) &< \lambda_n(t) \cdot h \cdot p_{n-1}(t+h) + (1 - \lambda_n(t) \cdot h) \cdot p_n(t+h) + o(h) \quad \big| -p_n(t+h) \\ \Leftrightarrow \quad p_n(t) - p_n(t+h) &< \lambda_n(t) \cdot h \cdot (p_{n-1}(t+h) - p_n(t+h)) + o(h) \quad \big| : 1/h > 0 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{p_n(t) - p_n(t+h)}{h} &< \lambda_n(t) \cdot (p_{n-1}(t+h) - p_n(t+h)) + \frac{o(h)}{h}. \end{aligned}$$

Für $h \rightarrow 0$ ist diese Ungleichung erfüllt, wenn $-\dot{p}_n(t) < \lambda_n(t) \cdot (p_{n-1}(t) - p_n(t))$ gilt, bzw.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -\dot{p}_n(t) < \underbrace{\frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \tilde{\beta}(t) \cdot \frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)}}_{\lambda_n(t)} \cdot (p_{n-1}(t) - p_n(t)) \quad (\text{Einsetzen der opt. Preise}) \\
&\Leftrightarrow -\dot{p}_n(t) < \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \tilde{\beta}(t) \cdot \frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)} \cdot \frac{1 - \delta}{\varepsilon} \cdot \left(\ln \left(\frac{K_{n-1}(t)}{K_{n-2}(t)} \right) - \ln \left(\frac{K_n(t)}{K_{n-1}(t)} \right) \right) \\
&\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c(t)}{v} + \frac{1 - \delta}{\varepsilon} \cdot \ln \left(\frac{K_n(t)}{K_{n-1}(t)} \right) \right) < \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \tilde{\beta}(t) \cdot \frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)} \cdot \frac{1 - \delta}{\varepsilon} \cdot \left(\ln \left(\frac{K_{n-1}(t)}{K_{n-2}(t)} \right) - \ln \left(\frac{K_n(t)}{K_{n-1}(t)} \right) \right) \\
&\Leftrightarrow -\frac{\dot{c}(t)}{v} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \delta} - \frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{K_n(t)}{K_{n-1}(t)} \right) < \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \tilde{\beta}(t) \cdot \frac{K_{n-1}(t)}{K_n(t)} \cdot \ln \left(\frac{K_{n-1}(t)^2}{K_n(t) \cdot K_{n-2}(t)} \right).
\end{aligned}$$

Sind die Produktionskosten $c(t)$ differenzierbar und nicht fallend in t so ist letztere Ungleichung stets erfüllt, wenn

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\dot{c}(t) \geq 0}{\Leftarrow} -\frac{\dot{K}_n(t) \cdot K_{n-1}(t) - K_n(t) \cdot \dot{K}_{n-1}(t)}{K_{n-1}(t)^2} < \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \tilde{\beta}(t) \cdot \ln \left(\frac{K_{n-1}(t)^2}{K_n(t) \cdot K_{n-2}(t)} \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\tilde{\beta}(t) \cdot K_{n-1}(t) \cdot K_{n-1}(t) - K_n(t) \cdot \tilde{\beta}(t) \cdot K_{n-2}(t)}{K_{n-1}(t)^2} < \frac{\varepsilon + v \cdot \gamma}{\varepsilon} \cdot \tilde{\beta}(t) \cdot \ln \left(\frac{K_{n-1}(t)^2}{K_n(t) \cdot K_{n-2}(t)} \right) \\
&\stackrel{\gamma \geq 0}{\Leftarrow} \tilde{\beta}(t) \cdot \left(1 - \frac{K_n(t) \cdot K_{n-2}(t)}{K_{n-1}(t)^2} \right) < \tilde{\beta}(t) \cdot \ln \left(\frac{K_{n-1}(t)^2}{K_n(t) \cdot K_{n-2}(t)} \right) \quad \left| \cdot 1 / \tilde{\beta}(t) > 0 \right. \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{K_n(t) \cdot K_{n-2}(t)}{K_{n-1}(t)^2} < -\ln \left(\frac{K_n(t) \cdot K_{n-2}(t)}{K_{n-1}(t)^2} \right).
\end{aligned}$$

Da K konkav im Bestand n ist, gilt $x := K_n(t) \cdot K_{n-2}(t) / K_{n-1}(t)^2 \in (0,1)$, und wir führen die letzte Ungleichung für alle $1 \leq n \leq N$ und $0 \leq t < T$ auf die Ungleichung $1 - x < -\ln x$, $\forall x \in (0,1)$ zurück. Da für $x=1$ beide Seiten der Ungleichung identisch sind und die rechte Seite $\forall x \in (0,1)$ schneller in x fällt als die linke Seite, vgl. $|-1| < |-1/x|$, so muss der Graph von $1 - x$ $\forall x \in (0,1)$ unterhalb dem von $-\ln x$ liegen. Damit folgt die Behauptung. \square

Abschnitt 6

Nachweis der Lösung der Differenzen-Differentialgleichung (6.1)

Wir zeigen, dass im verallgemeinerten (risikoneutralen) Modell mit Artikeln der Größe h die Funktion

$$V_n^{(h)}(t) = \frac{h}{d} \cdot \ln \left(\sum_{i=0, h, \dots}^n (B(t)/h)^{i/h} \cdot \frac{1}{(i/h)!} \right)$$

mit der Zeitableitung, vgl. $\dot{K}_n^{(h)} = -\beta(t)/h \cdot K_{n-h}^{(h)}$,

$$\dot{V}_n^{(h)}(t) = \frac{h}{d} \cdot \frac{\sum_{i=h, 2h, \dots}^n -(\beta(t)/h) \cdot (B(t)/h)^{i/h-1} \cdot \frac{i/h}{(i/h)!}}{\sum_{i=0, h, \dots}^n (B(t)/h)^{i/h} \cdot \frac{1}{(i/h)!}} = -\frac{\beta(t)}{d} \cdot \frac{\sum_{i=0, h, \dots}^{n-h} (B(t)/h)^{i/h} \cdot \frac{1}{i/h!}}{\sum_{i=0, h, \dots}^n (B(t)/h)^{i/h} \cdot \frac{1}{(i/h)!}}$$

eine Lösung der Differenzen-Differentialgleichung (6.1), vgl. auch (3.3) für $h=1$,

$$\dot{V}_n^{(h)}(t) + \frac{\beta(t)}{d} \cdot e^{-d \cdot \Delta V_n^{(h)}(t)/h} = 0$$

ist. Mit obigem Wertefunktionskandidaten ergibt sich für den zweiten Summanden der letzten Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\beta(t)}{d} \cdot e^{-d \cdot \Delta V_n^{(h)}(t)/h} &= \frac{\beta(t)}{d} \cdot \exp \left(-\ln \left(\sum_{i=0, h, \dots}^n \frac{(B(t)/h)^{i/h}}{(i/h)!} \right) + \ln \left(\sum_{i=0, h, \dots}^{n-h} \frac{(B(t)/h)^{i/h}}{(i/h)!} \right) \right) \\ &= \frac{\beta(t)}{d} \cdot \frac{\sum_{i=0, h, \dots}^{n-h} (B(t)/h)^{i/h} \cdot \frac{1}{(i/h)!}}{\sum_{i=0, h, \dots}^n (B(t)/h)^{i/h} \cdot \frac{1}{(i/h)!}} = -\dot{V}_n^{(h)}(t), \end{aligned}$$

und die Differenzen-DGL ist erfüllt. Darüber hinaus erfüllt $V_n^{(h)}(t)$ auch die Randbedingungen $V_0^{(h)}(t) = 0$ sowie $V_n^{(h)}(T) = 0$. Für die strukturell identischen Spezialfälle des risikoaversen sowie des risikoneutralen Fall mit $h=1$, vgl. (3.3), ist obige Rechnung analog zu führen.

Beweis von Theorems 6.1 (Konvergenz der Wertefunktionslösung)

Wir wollen die Konvergenz der Lösungsfunktion des stochastischen Modells für $h \rightarrow 0$ beweisen, d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} V_n^{(h)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{d} \cdot \ln \left(\sum_{i=0, h, \dots}^n \left(\frac{B(t)}{h} \right)^{i/h} \cdot \frac{1}{(i/h)!} \right) = V^{\det}(t, n) = \begin{cases} \frac{1}{d} \cdot B(t) & , n \geq B(t) \\ \frac{n}{d} \cdot \ln \left(\frac{e \cdot B(t)}{n} \right) & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Multiplizieren wir obige Behauptung mit d/n und definieren $m := n/h$ und $z := B(t)/n$ so genügt es

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m (m \cdot z)^i \cdot \frac{1}{i!} \right) = \begin{cases} z & , z < 1 \\ 1 & , z = 1 \\ 1 + \ln(z) & , z > 1 \end{cases}$$

zu zeigen. Der Beweis erfolgt in 3 Schritten.

(i) $z < 1$ (Überbestandsfall)

Wir wollen zeigen, dass $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m m^i \cdot z^i \cdot \frac{1}{i!} \right) = z \quad \forall z < 1$ gilt. Die ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m m^i \cdot z^i \cdot \frac{1}{i!} \right) - \frac{1}{m} \cdot \ln(e^{z \cdot m}) = \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m m^i \cdot z^i \cdot \frac{1}{i!} / e^{z \cdot m} \right) \quad (\text{Exponentialreihe}) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m \frac{(z \cdot m)^i}{i!} / \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z \cdot m)^i}{i!} \right) = \frac{1}{m} \cdot \ln \left(1 - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(z \cdot m)^i}{i!} / e^{z \cdot m} \right) \xrightarrow{z \cdot z, m \rightarrow \infty} 0 \quad \forall z < 1. \end{aligned}$$

$$\text{D.h. es genügt zu zeigen, dass } \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{m^i \cdot z^i}{i!} / e^{z \cdot m} \xrightarrow{z \cdot z, m \rightarrow \infty} 0 \quad \forall z < 1. \quad (\text{A3})$$

Betrachten wir dazu den logarithmierten Ausdruck, so lässt sich dieser wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{m^i \cdot z^i}{i!} / e^{z \cdot m} \right) &= \ln \left(\frac{m^m}{m!} \sum_{i=m+1}^{\infty} z^m \cdot (m \cdot z)^{i-m} \cdot \frac{m!}{i!} / e^{z \cdot m} \right) \\ &= m \ln(m) - \sum_{k=1}^m \ln(k) + m \ln(z) + \ln \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} (m \cdot z)^{i-m} \cdot \frac{m!}{i!} \right) - z m \\ &\leq m \ln(m) - \underbrace{\int_1^m \ln(x) dx}_{= m \ln(m) - m + 1} + m \ln(z) + \ln \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} (m \cdot z)^{i-m} \cdot \frac{m!}{i!} \right) - z m. \quad (\text{A4}) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den 4. Summanden einzeln und nutzen die folgende Abschätzung des Restgliedes der m -ten Partialsumme der Exponentialreihe gegen die geometrische Reihe

$$\begin{aligned}
\ln \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} (m \cdot z)^{i-m} \cdot \frac{m!}{i!} \right) &= \ln \left(\frac{(mz)}{m+1} + \frac{(mz)^2}{(m+1)(m+2)} + \dots \right) \\
&\leq \ln \left(\frac{(mz)}{m+1} + \frac{(mz)^2}{(m+1)(m+1)} + \frac{(mz)^3}{(m+1)(m+1)(m+1)} + \dots \right) \\
&\leq \ln \left(\frac{1}{1+(zm)^{-1}} + \left(\frac{1}{1+(zm)^{-1}} \right)^2 + \dots \right) \\
&= \ln \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+(zm)^{-1}} \right)^k \right) \stackrel{zm>1}{=} \ln(zm).
\end{aligned}$$

Aus der letzten Ungleichung folgt mit (A4)

$$\begin{aligned}
\ln \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(m \cdot z)^i}{i!} / e^{z \cdot m} \right) &\leq \underbrace{m \ln(m) - m \ln(m)}_{=0} + \ln(zm) + m \cdot (1 + \ln(z) - z) - 1 \\
&= \ln(zm) + m \cdot \underbrace{(1 + \ln(z) - z)}_{\substack{<0 \quad \forall z < 1, \\ =0 \quad (z=1)}} - 1.
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir somit, vgl. (A3),

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(m \cdot z)^i}{i!} / e^{z \cdot m} \leq z \cdot m \cdot e^{\underbrace{-m \cdot (z-1-\ln(z))}_{<0} - 1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \forall z < 1,$$

und der erste Teil der Behauptung ist bewiesen.

(ii) $z = 1$ (kritischer Bestand)

Da der Ausdruck $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m (m \cdot z)^i \cdot \frac{1}{i!} \right)$ in $z \geq 0$ steigt, liefert das Ergebnis aus (i) mit

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m (m \cdot z)^i \cdot \frac{1}{i!} \right) \stackrel{z \nearrow 1}{=} 1$, eine untere Schranke für den zu untersuchenden Fall mit $z = 1$. Dagegen liefert die Konvergenz der Exponentialreihe eine obere Schranke:

$$\frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m \frac{m^i}{i!} \right) \leq \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{m^i}{i!} \right). \text{ Es folgt } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m \frac{m^i}{i!} \right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{m^i}{i!} \right) = 1.$$

Das Zusammenfallen oberer und unterer Schranke impliziert schließlich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m m^i \cdot \frac{1}{i!} \right) = 1.$$

(iii) $z > 1$ (Unterbestandsfall)

Im letzten Teil des Beweises ist zu zeigen, dass $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m m^i \cdot z^i \cdot \frac{1}{i!} \right) = 1 + \ln(z) \quad \forall z \geq 1$

gilt. Wir stellen fest, dass der Ausdruck $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m m^i \cdot z^{i-m} \cdot \frac{1}{i!} \right)$, für alle $z \geq 1$ in z fällt.

Aus Teil (ii) folgt, vgl. $z = 1$, dass der letzte Ausdruck von oben durch 1 beschränkt ist. Für $z \rightarrow \infty$ erhalten wir auch eine untere Schranke, welche ebenfalls 1 ist. Für alle m gilt

$$\frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m m^i \cdot z^{i-m} \cdot \frac{1}{i!} \right) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\frac{m^m}{m!} \right),$$

da alle Terme der endlichen Summe bis auf den m -ten Summanden für $z \rightarrow \infty$ verschwinden. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m m^i \cdot z^{i-m} \cdot \frac{1}{i!} \right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\frac{m^m}{m!} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m \ln(m) - \sum_{k=1}^m \ln(k)}{m} = 1. \end{aligned}$$

Da obere und untere Schranke gleich 1 sind, gilt schließlich für alle $z \geq 1$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m m^i \cdot z^{i-m} \cdot \frac{1}{i!} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m m^i \cdot z^i \cdot \frac{1}{i!} \right) - \frac{1}{m} \cdot \ln(z^m) &= 1 \\ \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m m^i \cdot z^i \cdot \frac{1}{i!} \right) &= 1 + \ln(z) \quad \forall z \geq 1. \end{aligned}$$

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die Funktion

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^m (m \cdot z)^i \cdot \frac{1}{i!} \right) = \begin{cases} z & , z < 1 \\ 1 & , z = 1 \\ 1 + \ln(z) & , z > 1 \end{cases}$$

stetig und streng monoton steigend in z ist. □

Beweis von Proposition 6.1

Für den verallgemeinerten risikoneutralen Fall mit Artikeln der Größe h wollen wir für die Zustandswahrscheinlichkeiten $q^{(h)}$ die explizite Lösung, $n = 0, h, \dots, N$, $0 \leq t \leq T$,

$$q_n^{(h)}(t) = \frac{K_n^{(h)}(t)}{K_N^{(h)}(0)} \cdot \frac{(\bar{B}(t)/h)^{(N-n)/h}}{((N-n)/h)!} \quad (\text{A5})$$

herleiten. Der nachfolgende Beweis baut grundlegend auf dem Beweis von McAfee, te Velde (2006) im Falle des zeithomogenen reinen Preismodells und $h=1$ auf. Ausgehend von der optimalen Verkaufsrates ergibt sich mit der Dynamik $\lambda_n^{(h)}(t)/h = \beta(t)/h \cdot K_{n-h}^{(h)}(t)/K_n^{(h)}(t) = -\dot{K}_n^{(h)}(t)/K_n^{(h)}(t)$ auf dem h -Gitter, vgl. Beweis von Theorem 4.1, $h \leq n < N$,

$$\dot{q}_{n-h}^{(h)}(t) = \frac{\lambda_n^{(h)}(t)}{h} \cdot q_n^{(h)}(t) - \frac{\lambda_{n-h}^{(h)}(t)}{h} \cdot q_{n-h}^{(h)}(t) = -\frac{\dot{K}_n^{(h)}(t)}{K_n^{(h)}(t)} \cdot q_n^{(h)}(t) + \frac{\dot{K}_{n-h}^{(h)}(t)}{K_{n-h}^{(h)}(t)} \cdot q_{n-h}^{(h)}(t)$$

Mit dem Beweis von Theorem 4.1, folgt dass die obigen Differentialgleichungen für $q_{n-h}^{(h)}(t)$, $h \leq n < N$, mit den Randbedingungen $q_n^{(h)}(0) = 1_{\{n=N\}}$, ausgehend von $q_N^{(h)}(t) = K_N^{(h)}(t)/K_N^{(h)}(0)$, die rekursive Lösung

$$q_{n-h}^{(h)}(t) = K_{n-h}^{(h)}(t) \cdot \int_0^t \frac{-\dot{K}_n^{(h)}(s)}{K_{n-h}^{(h)}(s)} \cdot \frac{q_n^{(h)}(s)}{K_n^{(h)}(s)} ds = K_{n-h}^{(h)}(t) \cdot \int_0^t \frac{\beta(s) \cdot q_n^{(h)}(s)}{h \cdot K_n^{(h)}(s)} ds \quad (\text{A6})$$

haben. Wir zeigen per Induktion, dass die explizite Lösung (A5) für $q_n^{(h)}(t)$ obige DGL erfüllt:

Induktionsanfang $n=N$: $q_N^{(h)}(t) = \frac{K_N^{(h)}(t)}{K_N^{(h)}(0)} \cdot \frac{(\bar{B}(t)/h)^{(N-N)/h}}{((N-N)/h)!} = \frac{K_N^{(h)}(t)}{K_N^{(h)}(0)}$, mit $\bar{B}(t) := \int_0^t \beta(s) ds$.

Induktionsvoraussetzung: $q_n^{(h)}(t) = \frac{K_n^{(h)}(t)}{K_N^{(h)}(0)} \cdot \frac{(\bar{B}(t)/h)^{(N-n)/h}}{((N-n)/h)!}$, $0 \leq n \leq N$

Induktionsbehauptung: $q_{n-h}^{(h)}(t) = \frac{K_{n-h}^{(h)}(t)}{K_N^{(h)}(0)} \cdot \frac{(\bar{B}(t)/h)^{(N-n+h)/h}}{((N-n+h)/h)!}$, $h \leq n \leq N$.

Offenbar sind sowohl die Randbedingungen $q_n^{(h)}(0) = 1_{\{n=N\}}$, $h \leq n < N$, als auch der Induktionsanfang erfüllt. Für den Induktionsschritt ergibt sich ausgehend von (A6)

$$\begin{aligned} q_{n-h}^{(h)}(t) &= K_{n-h}^{(h)}(t) \cdot \int_0^t \frac{\beta(s)}{h \cdot K_n^{(h)}(s)} \cdot q_n^{(h)}(s) ds \\ &= K_{n-h}^{(h)}(t) \cdot \int_0^t \frac{\beta(s)}{h \cdot K_n^{(h)}(s)} \cdot \underbrace{\frac{(\bar{B}(s)/h)^{(N-n)/h} \cdot K_n^{(h)}(s)}{((N-n)/h)! \cdot K_N^{(h)}(0)}}_{q_n^{(h)}(s) \text{ (nach IV)}} ds \quad (\text{nach Induktionsvor.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K_{n-h}^{(h)}(t)}{K_N^{(h)}(0)} \cdot \int_0^t \frac{\beta(s) \cdot (\bar{B}(s)/h)^{(N-n)/h}}{h \cdot (N/h - n/h)!} ds, \quad \text{wobei } \beta(t) = \dot{\bar{B}}(t) \\
&= \frac{K_{n-h}^{(h)}(t)}{K_N^{(h)}(0)} \cdot \frac{(\bar{B}(t)/h)^{(N-n+h)/h}}{((N-n+h)/h)!}. \quad \square
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Auf Basis dieses Ergebnisses werden nun die Eigenschaften (i)-(iv) für die Auswertung erwarteter charakteristischer Modellgrößen hergeleitet:

Beweis von Proposition 6.1 (i)-(iv)

- (i) Der Beweis der Formel für den erwarteten Abverkauf geht ebenfalls auf McAfee, te Velde (2006) für den zeithomogenen reinen Preisfall mit $h=1$ zurück. Es gilt

$$\begin{aligned}
E_{0,N}(N - X_t^{(h)}) &:= E(N - X_t^{(h)} | X_0^{(h)} = N) \\
&= \sum_{n=0, h, \dots}^N (N - n) \cdot q_n^{(h)}(t) = \sum_{n=0, h, \dots}^{N-h} (N - n) \cdot \frac{K_n^{(h)}(t)}{K_N^{(h)}(0)} \cdot \frac{(\bar{B}(t)/h)^{(N-n)/h}}{((N-n)/h)!} \\
&= \frac{\bar{B}(t)}{h} \cdot \sum_{n=0, h, \dots}^{N-h} \frac{K_n^{(h)}(t)}{K_N^{(h)}(0)} \cdot \frac{(\bar{B}(t)/h)^{(N-n-h)/h}}{((N-n-h)/h)!} \quad \left| \cdot \frac{K_{N-h}^{(h)}(0)}{K_{N-h}^{(h)}(0)} = 1 \right. \\
&= \frac{\bar{B}(t)}{h} \cdot \frac{K_{N-h}^{(h)}(0)}{K_N^{(h)}(0)} \cdot \underbrace{\sum_{n=0, h, \dots}^{N-h} \frac{K_n^{(h)}(t)}{K_{N-h}^{(h)}(0)} \cdot \frac{(\bar{B}(t)/h)^{(N-n-h)/h}}{((N-n-h)/h)!}}_{\substack{q_{\tilde{n}}^{(h)}(t) \text{ für } \tilde{n} \leq \tilde{N} = N-h \\ = 1 \text{ (komplette Wahrscheinlichkeitsverteilung)}}} = \frac{\bar{B}(t)}{h} \cdot \frac{K_{N-h}^{(h)}(0)}{K_N^{(h)}(0)}.
\end{aligned}$$

- (ii) Für die erwarteten Preise erhalten wir direkt $E_{0,N}(p_{N_t}^{(h)}(t)) = \sum_{n=0, h, \dots}^N p_n^{(h)}(t) \cdot q_n^{(h)}(t)$.

- (iii) Das erwartete Ende $\tau^{(h)}$ des Verkaufsprozesses setzt sich aus der mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gewichteten Mischung aus einem vorzeitigen Ende und dem vollen Verkaufshorizont T zusammen:

$$E_{0,N}(\tau^{(h)}) = E_{0,N}(\tau^{(h)} | \tau^{(h)} < T) \cdot q_0^{(h)}(T) + (1 - q_0^{(h)}(T)) \cdot T,$$

wobei $q_0^{(h)}(t) = \frac{(\bar{B}(t)/h)^{N/h}}{K_N^{(h)}(0) \cdot (N/h)!}$ die Ausverkaufswahrscheinlichkeit in t ist. Ihre zeitliche

Änderung ist durch $\dot{q}_0^{(h)}(t) = \frac{(\bar{B}(t)/h)^{N/h-1} \cdot \beta(t)/h}{(N/h-1)! \cdot K_N^{(h)}(0)}$ gegeben und liefert die folgende

Berechnung:

$$\begin{aligned}
E_{0,N}(\tau^{(h)} \mid \tau^{(h)} < T) &= \int_0^T t \cdot \dot{q}_0^{(h)}(t) dt = \int_0^T t \cdot \frac{\beta(t)/h \cdot (\bar{B}(t)/h)^{N/h-1}}{(N/h-1)! K_N^{(h)}(0)} dt \\
&\stackrel{\text{hom}}{=} \frac{1}{(N/h-1)! K_N^{(h)}(0)} \cdot (\beta/h)^{N/h} \cdot \int_0^T t^{N/h} dt \quad (\bar{B}(t) = \beta \cdot t, \text{ zeithom. Fall}) \\
&\stackrel{\text{hom}}{=} \frac{(\beta/h)^{N/h} \cdot t^{N/h+1}}{(N/h+1) \cdot (N/h-1)! K_N^{(h)}(0)} \Big|_0^T \\
&\stackrel{\text{hom}}{=} \frac{(\beta/h)^{N/h} \cdot T^{N/h+1}}{(N/h+1) \cdot (N/h-1)! K_N^{(h)}(0)}.
\end{aligned}$$

Es folgt
$$E_{0,N}(\tau^{(h)}) \stackrel{\text{hom}}{=} \frac{N/h \cdot (\beta/h)^{N/h} \cdot T^{N/h+1}}{(N/h+1)! K_N^{(h)}(0)} \cdot q_0^{(h)}(T) + (1 - q_0^{(h)}(T)) \cdot T$$

$$\stackrel{\text{hom}}{=} T - \left(1 - \frac{N/h \cdot (\beta \cdot T/h)^{N/h}}{(N/h+1)! K_N^{(h)}(0)} \right) \cdot q_0^{(h)}(T) \cdot T.$$

(iv) Aus der punktweise geltenden Dorfman-Steiner Identität $k(t) \cdot w_n^{(h)}(t) \equiv \lambda_n^{(h)}(t) \cdot v \cdot \delta / \varepsilon$ folgt

$$\begin{aligned}
E_{0,N}(W_t^{(h)}) &= E_{0,N} \left(\int_0^t k(s) \cdot w_s^{(h)} ds \right) = \frac{v \cdot \delta}{\varepsilon} \cdot E_{0,N} \left(\int_0^t \lambda^{(h)}(s, p_s^{(h)}, w_s^{(h)}) ds \right) \\
&= \frac{v \cdot \delta}{\varepsilon} \cdot (N - E_{0,N}(X_t^{(h)})) \stackrel{(i)}{=} \frac{v \cdot \delta}{\varepsilon} \cdot \bar{B}(t) \cdot \frac{K_{N-h}^{(h)}(0)}{K_N^{(h)}(0)},
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Formel des erwarteten Abverkaufs siehe (i) angewandt wurde.

□

Vorträge im OR Forschungsseminar und Konferenzteilnahmen

01.02.2011	Ein Stochastisches Dynamisches Dorfman-Steiner Modell	(Kapitel 1)
29.03.2011	A Stochastic Dynamic Dorfman-Steiner Model (<i>Workshop on Stochastic Models and Control, Bad Herrenalb 2011</i>)*	(Kapitel 1)
26.04.2011	Erweiterungen des McAfee, te Velde Modells	(Kapitel 1 u. 2)
22.11.2011	A Stochastic Dynamic A&P Model under Risk Aversion	(Kapitel 6)
07.02.2012	Dynamic P&A in an Oligopoly Adoption Model	(Kapitel 3)
09.03.2012	A Stochastic Dynamic A&P Model under Risk Aversion (<i>10th German Probability and Statistics Days, Mainz 2012</i>)*	(Kapitel 6)
29.05.2012	A Deterministic Version of the Time-Inhomogeneous Gallego & van Ryzin Model with Advertising	(Kapitel 5)
29/30.06.2012	<i>12th INFORMS Revenue Management and Pricing Section, Berlin 2012</i>	
06.11.2012	Modelling Time Discrete Dynamic Marketing-Mix Problems: Budget Constraints, Goodwill, Risk Restrictions and Learning	(Manuskript)
13.11.2012	Dynamic Pricing with Time Dependent Demand Elasticities and Applications in the Airline Industry	(Manuskript)
18.03.2013	Risk Averse Dynamic Pricing and Advertising with Exponential Demand (<i>Workshop on Stochastic Models and Control, Berlin 2013</i>)	(Kapitel 5 u. 6)
04.06.2013	Stochastic Dynamic Multi Product Problems vs. Oligopoly Competition with Individual State Space	(Kapitel 4) (Manuskript)

* Teilnahme gefördert durch die Wirtschaftswissenschaftliche Gesellschaft der HU Berlin

Wissenschaftlicher Werdegang

1988 – 1994	Grundschule Berlin
1994 – 1999	Mathematische Schülergesellschaft (MSG) der HU Berlin
1994 – 2001	Pestalozzi Gymnasium Berlin Abschluss: Abitur
WS 2002 – SS 2003	Humboldt-Universität zu Berlin Lehramtsstudium (Deutsch und Mathematik, Studienrat)
WS 2003 – Okt. 2010	Humboldt-Universität zu Berlin Mathematikstudium Abschluss: Diplom Mathematiker
WS 2005 – Feb. 2010	Humboldt-Universität zu Berlin BWL-Studium Abschluss: Diplom Kaufmann
Juli 2011 – Sep. 2013	Elsa-Neumann-Stipendium des Landes Berlin WiWi Fakultät, Institut für OR, HU Berlin
seit Oktober 2013	Wissenschaftlicher Mitarbeiter WiWi Fakultät, Institut für OR, HU Berlin

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Dissertation ohne Hilfe Dritter (mit Ausnahme der in der Danksagung erwähnten Personen) angefertigt habe. Außer der angeführten Literatur habe ich keine weiteren Hilfsmittel verwendet. Zitate aus der Literatur und entlehnte Gedanken sind als solche mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht. Ich bezeuge durch meine Unterschrift, dass meine Angaben über die bei der Abfassung meiner Dissertation benutzten Hilfsmittel, über die mir zuteil gewordene Hilfe sowie über frühere Begutachtungen meiner Dissertation in jeder Hinsicht der Wahrheit entsprechen.

Berlin, den 7. Januar 2014

Rainer Schlosser

